อนุพันธ์บางส่วน

การหาอนุพันธ์บางส่วนลำดับที่หนึ่ง

กำหนด $y = f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$

ดังนั้น $\frac{\partial y}{\partial x_1} \equiv f_1 = 6x_1 + x_2$

$\frac{\partial y}{\partial x_2} \equiv f_2 = x_1 + 8x_2$

y = f(u, v) = (u + 4)(3u + 2v)

เมื่อ v คงที่ , f_u = (u + 4)(3) + 1(3u + 2v) = 2(3u + v +6)

เมื่อให้ u คงที่ ดังนั้น f_v = (u + 4)(2) + 0(3u + 2v) = 2(u + 4)

เมื่อ u = 2 , v = 1 ดังนั้น

F_u (2,1) = 2(13) = 26 และ f_v (2,1) = 2(6) = 12

กำหนด $y = \frac{(3u-2v)}{(u^2+3v)}$ จงหา $\frac{\partial y}{\partial u}$ และ $\frac{\partial y}{\partial y}$ โดยใช้กฎการหาร

$\frac{\partial y}{\partial u}$ = $\frac{-3u^2+4uv}{(u^2+3v)^2}$ และ $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-u(2u+a)}{(u^2+3v)^2}$

แบบฝึกหัด

1. จงหา $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ และ $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ ในฟังก์ชันต่อไปนี้

(ก) $y = 2x_1^3 - 11x_1^2x_2 + 3x_2^2$ (ค) $y = (2x_1+3)(x_2-2)$

(ข) $y = 7x_1 + 6x_1x_2^2 - 9x_2^3$ (ง) $y = \frac{(5x_1+3)}{(x_2-2)}$

2. จงหา f_x และ f_y จากฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $f(x,y) = x^2 + 5xy + y^3$ (c) $f(x,y) = \frac{2x-3y}{x+y}$

(b) $f(x,y) = (x^2-3y)(x-2)$ (d) $f(x,y) = \frac{x^2-1}{xy}$

3. จากข้อ (2) ให้หา $f_x(1,2)$

4. $Q = 96\ K^{0.3}L^{0.7}$ จงหา MP_K และ MP_L

MPP_K เป็นฟังก์ชันของ K ตัวแปรเดียวหรือไม่หรือเป็นทั้ง K และ L ทำนองเดียวกัน MPP_L เป็นฟังก์ชันที่มี L ตัวแปรเดียวหรือไม่

5. $u = u(x_1, x_2) = (x_1+2)^2(x_2+3)^3$, u = ฟังก์ชันอรรถประโยชน์ และ x_1, x_2 คือ สินค้าสองชนิด

   (a) หา MU ของแต่ละสินค้า

   (b) หา MU ของสินค้า x_1 เมื่อ $x_1 = 3$, $x_2 = 3$

อนุพันธ์บางส่วนลำดับที่สอง (Second–order partial derivative)

อนุพันธ์บางส่วนลำดับที่สองเป็นการหาอนุพันธ์บางส่วนจากอนุพันธ์บางส่วนลำดับที่หนึ่ง

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 25 - 10x_2 + x_1$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f_{x_2x_2} = -10$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial y}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{12} = 1, \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\right] = \frac{-\partial^2 y}{\partial x_1^2} = f_{11} = -6$$

จะเห็นว่า $f_{12} = f_{21}$

แบบฝึกหัด 3.2

จงหา $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ และ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ จากข้อต่อไปนี้

(ก) $z = xy + x^2y + xy^2$

(ข) $z = (x+y)c^{(x+y)}$

(ค) $z = (x^2 + y^2)$

(ง) $z = \frac{x+y}{x-y}$

(จ) $z = (2x+3)(y-2)$

(ฉ) $z = (x+2)^2(y+3)^3$

ดิฟเฟอเรนเชียล (Differentials)

ที่ผ่านมาเราศึกษา $\frac{dy}{dx}$ เป็นพจน์เดียวกัน ต่อไปนี้เราจะแยกพิจารณาค่า dy และ dx เป็นเสมือนจำนวนหรือตัวเลขแยกคนละตัว ดังนั้น $\frac{dy}{dx}$ จึงเป็นเทอมที่แสดงอัตราส่วนระหว่างตัวเลข 2 ตัว ในภาษาคณิตศาสตร์ dy และ dx ที่มีค่าแยกเป็นคนละตัวนี้มีชื่อว่า "ดิฟเฟอเรนเชียล" ตัวอย่างเช่นพิจารณา y = f(x) โดย y คือ ระยะทางเป็นกิโลเมตรที่รถวิ่งได้ x คือ จำนวนชั่วโมงที่ขับรถ ดังนั้น f(x) หมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางต่อการเปลี่ยนแปลงของเวลา 1 หน่วย ถ้าเพิ่มเวลาการขับรถอีก dx จะทำให้ได้ระยะทางเพิ่ม dy กิโลเมตร นั่นคือ

$$dy = f'(x) \cdot dx \qquad (3.5.1)$$

กฎของดิฟเฟอเรนเชียล ที่นำมาใช้ในการคำนวณ

$$1.\ dk = 0$$
$$2.\ d(cu^n) = cnu^{n-1}du$$
$$3.\ d(u \pm v) = du \pm dv$$
$$4.\ d(uv) = vdu + udv$$
$$5.\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$
$$6.\ d(u \pm v \pm w) = du \pm dv \pm dw$$
$$7.\ d(uvw) = vwdu + uwdv + uvdw$$

ตัวอย่าง $y = 4x^2$, $f'(x) = \frac{dy}{dx} = 8x$

ดังนั้น ดิฟเฟอเรนเชียลของ y คือ dy = (8x)· dx

แบบฝึกหัด

จงหา ดิฟเฟอเรนเชียลของฟังก์ชันต่อไปนี้

(ก) $y = -x(x^2+3)$ (ข) $y = (x-8)(7x+5)$ (ค) $y = \frac{x}{x^2+1}$

ดิฟเฟอเรนเชียลทั้งหมด (Total differentials)

ถ้ามีตัวแปรมากกว่า 2 ตัวแปร เราสามารถใช้แนวคิดดิฟเฟอเรนเชียลได้

กำหนด y = f(A, B) เมื่อให้ A, B เปลี่ยนแปลงพร้อมๆกัน

$$dy = \frac{\partial y}{\partial a} \cdot dA + \frac{\partial y}{\partial B} \cdot dB$$

$$dy = f_A \cdot dA + f_B \cdot dB \qquad (3.6.1)$$

จงหา dy ของ $y = -5 + 30x_1 - 3x_1^2 + 25x_2 - 5x_2^2 + x_1x_2$

เราจะได้ $f_1 = 30 - 6x_1 + x_2$ และ $f_2 = 25 - 10x_2 + x_1$ ดังนั้น

$dy = (30 - 6x_1 + x_2)dx_1 + (25 - 10x_2 + x_1)dx_2$

ถ้ากำหนด $x_1 = 5$, $x_2 = 2$ โดย $dx_1 = 0.02$, $dx_2 = 0.02$ ผลกระทบต่อ y เมื่อ (1) x_1 เปลี่ยนอย่างเดียว คือ 0.04 (2) เมื่อ x_2 เปลี่ยนอย่างเดียว คือ 0.20 (3) เมื่อ x_1 และ x_2 เปลี่ยน คือ 0.24

แบบฝึกหัด

จงหา Total differentials ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(ก) $z = 3x^3 + xy - 2y^3$ (ข) $u = 2x_1 + 9x_1x_2 + x_2^2$

(ค) $y = \dfrac{x_1}{x_1 + x_2}$ (ง) $y = \dfrac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$

อนุพันธ์ทั้งหมด (Total derivative)

อนุพันธ์ทั้งหมดเป็นแนวคิดต่อเนื่องมาจากเรื่องดิฟเฟอเรนเชียล แต่ในหัวข้อดังกล่าวนั้น ตัวแปรอิสระจะต้องไม่มีความสัมพันธ์กัน เช่น $y = f(x_1, x_2)$ โดย x_1 , x_2 ต้องเป็นอิสระต่อกัน แต่ถ้าเกิดกรณีในแบบจำลองเศรษฐศาสตร์ ซึ่งอาจมีลักษณะเช่น

Z = f(x , y) และ y = g(x) ผลกระทบการเปลี่ยนแปลงของ x ต่อตัวแปร z หรือ $\dfrac{dz}{dx}$ เราสามารถ Total differential คือ $dz = f_x dx + f_y dy$ แต่เราต้องการทราบผลกระทบ ดังนั้น $\dfrac{dz}{dx} = f_x + f_y \dfrac{dy}{dx}$ เรียกว่า “Total derivative” $f_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ กับ $\dfrac{dz}{dx}$ มีค่าและความหมายแตกต่างกัน เพราะมีการคำนวณจากข้อสมมติที่ต่างกัน

จงหาอนุพันธ์รวม $\frac{dz}{dx}$ ของ $z = 4x^3 - y^2$ และ $y = x^2 - 5$

$$\frac{dz}{dx} = f_x + f_y \frac{dy}{dx}$$

โดย $f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2$

$f_y = \frac{\partial z}{\partial x} = -2y$

$$= 12x^2 + (-2y)(2x)$$
$$= 12x^2 - 4xy$$
$$= 12x^2 - 4(x)(x^2 - 5)$$
$$= 12x^2 - 4x^3 + 20$$

$12x^2$ คือ ผลกระทบโดยตรงจาก $x \to z$ และ $-4x^3 + 20$ เป็นผลกระทบจาก $x \to y \to z$

ถ้า Z = f(x , y) และ x = g(w) , y = h(w) ดังนั้น $\frac{dz}{dw} = f_x \frac{dx}{dw} + f_y \frac{dy}{dw}$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย (Implicit function)

ตัวอย่าง Explicit function เช่น $y = \frac{100}{x^2 - 5}$

แสดงว่า y ขึ้นอยู่กับ x อย่างชัดเจน เขียนสมการใหม่เป็น

$$y(x^2 - 5) = 100$$
$$x^2 y - 5y = 100$$

สมการข้างต้นจะเรียกว่าเป็น “Implicit function” มักจะเขียนอยู่ในรูป F(y, x) = 0 แสดงว่าไม่สามารถเขียนฟังก์ชันให้เห็นชัดเจนได้

ตัวอย่าง $F(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$

ถ้าเขียนให้เป็น Explicit function คือ $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ หรือ $y = \sqrt{9 - x^2}$ และ $y = -\sqrt{9 - x^2}$ ก็สามารถหาค่าได้

การหา $\frac{\partial y}{\partial x}$ หรือ $\frac{\partial y}{\partial w}$ ทำได้ยากจึงต้องใช้ Implicit Function

$$F(y, x_1, x_2) = 0$$

$$Fy = \frac{\partial F}{\partial y}, F_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, F_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2}$$ สมมติ $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$

$$Fydy + F_1 dx_1 + F_2 dx_2 = 0$$

ถ้า x_2 คงที่ $\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{-F_1}{F_y}$ ถ้า x_1 คงที่ $\frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{-F_2}{F_y}$

ตัวอย่าง

$$z = 10x^4 - 3y^2$$
$$x = 12w - 10$$
$$y = 2w^3$$

ดังนั้น $f_x = 40x^3$

$$f_y = -6y$$
$$\frac{du}{dw} = 12, \frac{dy}{dw} = 6w^2$$
$$\therefore \frac{dz}{dw} = 40x^3(12) - (6y)(6w^2)$$
$$= 40(12w-10)^3(12) - 6(2w^3)(6w^2)$$
$$= 480(12w-10)^3 - 72w^5$$

แบบฝึกหัด

1. $z = x^2 + xy + y^2$, $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t - \frac{1}{t}$ จงหา $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$

2. $z = (x+y)(x-2y)$, $x = 2 - 7y$ จงหา $\frac{dz}{dy}$

3. ให้ $z = x^2 - 8xy - y^2$, $x = 3t$, $y = 1 - t$ จงหา $\frac{dz}{dt}$

4. $x^3 + 2x^2y - 3xy^2 - y^3 = 0$ จงหา $\frac{\partial y}{\partial x}$

5. $x^3y^2 + c^x - c^y = 0$ จงหา $\frac{\partial y}{\partial x}$

6. $3\ell n(x+y) + 4x^2 - y^2 = 0$ จงหา $\frac{\partial y}{\partial x}$

7. จงหา $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}$

   (ก) $x^2y^3 + z^2 + xyz = 0$

   (ข) $x^3z^2 + y^3 + 4xyz = 0$

   (ค) $3x^2y^3 + xz^2y^2 + y^3zx^4 + y^2z = 0$