เมตริกซ์และระบบสมการเชิงเส้น

การดำเนินการ (Operations)

1) การเท่ากันของเมตริกซ์

นิยาม 1 สองเมตริกซ์ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ A และ B มีขนาดเดียวกัน และ $a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,2,3,...,m,\ j=1,2,3,...,n)$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix}$ แสดงว่า $x=4, y=3$

และ $\begin{bmatrix} 4x+2y \\ 2x-3y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ แสดงว่า $4x+2y=7$ และ $2x-3y=2$

2) การบวกของเมตริกซ์

นิยาม 2 ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]$ และ $B=\left[b_{ij}\right]$ มีขนาด $m\times n$ ทั้งคู่แล้ว $A+B$ คือ เมตริกซ์ $C=\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ เมื่อ $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

ตัวอย่าง

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 7 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-1 & 4+6 \\ 2+2 & 5+7 \\ 3-3 & -6+8 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 4 & 12 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

$$\begin{bmatrix} t^2 & -5 \\ 5t & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ t & -t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^2+2 & -1 \\ 6t & -t \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

เมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ บวกกันไม่ได้ เพราะมีขนาดไม่เท่ากัน

การบวกเมตริกซ์เป็นไปตามคุณสมบัติการสลับที่ และการเปลี่ยนกลุ่ม กล่าวคือ

(1) $A+B=B+A$

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$

การลบเมตริกซ์ก็ทำเช่นเดียวกันกับการบวก คือ ต้อมีขนาดเดียวกัน และนำสมาชิกที่อยู่ใน ตำแหน่งเดียวกันมาลบกัน

ตัวอย่าง $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$

3) สเกลาร์ (scalar) คูณเมตริกซ์

นิยาม 3 ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]$ เป็น $m\times n$ เมตริกซ์ และ r เป็นสเกลาร์แล้ว $r\cdot A$ คือ เมตริกซ์ $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ เมื่อ $b_{ij}=ra_{ij}$

ตัวอย่าง จงหา $2A-B$

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} & 2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -6 & -8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ถ้า a_1, a_2 เป็นสเกลาร์ และ A, B เป็นเมตริกซ์ใดๆ ที่มีขนาดเดียวกันแล้ว

(1) $a_1A = Aa_1$

(2) $a_1(A+B) = a_1A + a_1B$

(3) $(a_1+a_2)A = a_1A + a_2A$

(4) $a_1(a_2A) = (a_1a_2)A$

แบบฝึกหัด

1. ถ้า $\begin{bmatrix} 1 & s & 2 \\ -2 & 4 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ แล้ว s และ t เท่ากับเท่าไร

2. จงหาค่าของตัวแปรที่เป็นจำนวนจริง เมื่อกำหนด $A = B$

2.1) $A = \begin{bmatrix} x+y & 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & y \end{bmatrix}$

2.2) $A = \begin{bmatrix} x-1 & 0 & y \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & z+2 & 3 \end{bmatrix}$

2.3) $A = \begin{bmatrix} x+y & 5 \\ -1 & x-w \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & y-x \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

ถ้า $A + B = C$ จงหาเมตริกซ์ A ที่เป็นจำนวนจริง

4. จงหาเมตริกซ์ C ถ้า $3A + 2C = B$ กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 4 \\ -23 & 0 & -15 \\ -6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

5. จงหา $5A - 3B$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

การคูณระหว่างเมตริกซ์

นิยาม 4 ถ้า $A=[a_{11},a_{12},...,a_n]$ เป็นเมตริกซ์ที่มี 1 แถว n หลักเรียก A ว่า เมตริกซ์แถว (Row matrix) และ

ถ้า $B=\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ที่มี n แถว 1 หลัก เรียก B ว่า เมตริกซ์หลัก

นิยาม 5 ถ้า A เป็นเมตริกซ์แถว และ B เป็นเมตริกซ์หลัก ผลคูณ AB จะเป็นเมตริกซ์ขนาด 1×1 โดยที่ $AB=[a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+...+a_{1n}\times b_{n1}]$ (การคูณ AB จะคูณได้เมื่อจำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B)

ตัวอย่าง 4.8

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(3)(1)+(5)(-2)+(1)(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-2)(-2)+(0)(0)+(1)(-3)+(3)(4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}$

ตัวอย่าง กำหนด

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}, E=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1) $BD=[-27]$

(2) $CE=[29]$

(3) $CF=[25]$

(4) $AE=[-7]$

(5) $BE =$ หาผลคูณไม่ได้ เนื่องจากจำนวนหลักของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ E

นิยาม 6 ให้ $A=[a_{ij}]_{k\times n}, B=[b_{ij}]_{n\times p}$ ผลคูณ AB=C จะเป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด $k\times p$ โดยที่สมาชิก c_{ij} ของ C เกิดจากคูณเมตริกซ์ แถวที่ i ของ A ด้วยเมตริกซ์หลักที่ j ของ B แล้วนำมาบวกกัน

ตัวอย่าง กำหนดเมตริกซ์ A และ B ดังข้างล่างนี้ จงพิจารณาดูว่าสามารถหาผลคูณ AB และ BA ได้หรือไม่ ถ้าหาได้ จงบอกขนาดเมตริกซ์ของผลคูณนั้น

(1) $A=[a_{ij}]_{2\times 3}, B=[b_{ij}]_{3\times 2}$

หา AB ได้ และมีขนาด 2×2

หา BA ได้ และมีขนาด 3×3

(2) $A=[a_{ij}]_{2\times 2}, B=[b_{ij}]_{2\times 3}$

หา AB ได้ และมีขนาด 2×3

หา BA ไม่ได้ เพราะจำนวนหลักของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A

(3) $A=[a_{ij}]_{3\times 3}, B=[b_{ij}]_{3\times 1}$

หา AB ได้ และมีขนาด 3×1

หา BA ไม่ได้ เพราะจำนวนหลักของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A

ตัวอย่าง จงหา AB

กำหนด $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 2 & 6 & 0\\ 5 & -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}3(4)+2(5) & 3(2)+2(-1) & 3(6)+2(2) & 3(0)+2(1)\\ 0(4)+1(5) & 0(2)+1(-1) & 0(6)+1(2) & 0(0)+1(1)\\ 4(4)+2(5) & 4(2)+2(-1) & 4(6)+2(2) & 4(0)+2(1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}24 & 4 & 22 & 2\\ 5 & -1 & 2 & 1\\ 26 & 6 & 28 & \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง จงหา AB และ BA กำหนด

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}16 & 3\\ -1 & 12\end{bmatrix}, BA=\begin{bmatrix}15 & 5\\ 0 & 13\end{bmatrix}$$

การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ จะมีคุณสมบัติดังนี้

(1) $A(BC)=(AB)C$ (กฎการเปลี่ยนกลุ่ม)

(2) $A(B+C)=AB+AC$ (กฎการกระจายทางซ้าย)

(3) $(B+C)A=BA+CA$ (กฎการกระจายทางขวา)

(4) $AB=AC$ แล้วไม่จำเป็น B = C (ไม่มีคุณสมบัติการตัดออก)

การคูณเมตริกซ์มีความสัมพันธ์กับระบบสมการเชิงเส้น พิจารณาระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}4x-2y+z&=13\\ x+y-3z&=-5\\ 7x-2z&=2\end{aligned}$$

สมการนี้หาค่าได้ด้วยการแทนค่า สมการข้างต้นสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ ดังนี้

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 7 & 0 & -2\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}13\\ -5\\ 2\end{bmatrix}$$

$$AX=B$$

เรียก A ว่า เมตริกซ์สัมประสิทธิ์ คือ เมตริกซ์ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x,y,z เรียก X ว่า เมตริกซ์ตัวแปร เรียก B ว่า เมตริกซ์ค่าคงที่

ตัวอย่าง 4.13 จงเขียนระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

$$\begin{aligned}x-y+z+w&=3\\ x+y-z&=2\\ 2x+y+3w&=0\\ x-2y+4z+3w&=-1\end{aligned}$$

วิธีทำ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณาว่าเมตริกซ์ A และ B ต่อไปนี้ สามารถหา AB และ BA ได้หรือไม่ ถ้าหาได้จงบอกขนาดของเมตริกซ์การคูณ

1) $A = [a_{ij}]_{3\times 4}, B = [b_{ij}]_{4\times 1}$
2) $A = [a_{ij}]_{1\times 1}, B = [b_{ij}]_{1\times 2}$
3) $A = [a_{ij}]_{3\times 3}, B = [b_{ij}]_{3\times 2}$
4) $A = [a_{ij}]_{3\times 1}, B = [b_{ij}]_{1\times 3}$
5) $A = [a_{ij}]_{3\times 5}, B = [b_{ij}]_{5\times 3}$

2. จงหาผลคูณของเมตริกซ์

1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. จงเขียนระบบสมการต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

$$x + y + z = 3$$
$$2z + x + y = 2$$
$$y + x = 1$$

4. จงเขียนระบบสมการต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

$$4x+2y+3z+5w=7$$
$$x+y+w=0$$
$$3x+y+2z=-2$$
$$x+y+2z+3w=4$$

แบบของเมตริกซ์

ทรานสโพสของเมตริกซ์ (Transpose matrix)

กำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์ใดๆ ทรานสโพสของ A แทนด้วย A^t เกิดจากการเปลี่ยนทุกๆแถวของ A เป็นหลักของ A^t ดังนั้น แถวที่หนึ่งของ A จะกลายเป็นหลักที่หนึ่งของ A^t เป็นต้น เช่น

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix} \text{ ดังนั้น } A^t=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

นิยาม 7 ถ้า $A=[a_{ij}]$ เป็น $m\times n$ เมตริกซ์ แล้ว $A^t=[a_{ij}]$ เป็น $n\times m$ เมตริกซ์ เมื่อ $a'_{ij}=a_{ji}$

คุณสมบัติของทรานสโพส

1) $(A^t)^t=A$
2) $(KA)^t=KA^t$ เมื่อ K เป็นสเกลาร์ (จำนวนจริง)
3) $(A+B)^t=A^t+B^t$
4) $(A+B+C)^t=A^t+B^t+C^t$
5) $(AB)^t=B^tA^t$
6) $(ABC)^t=C^tB^tA^t$

ตัวอย่าง จงหา $(AB)^t$ และ $(BA)^t$ กำหนด

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^t A^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์จัตุรัส (Square matrix)

เมตริกซ์จัตุรัส คือ เมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก เช่น

$$[5], \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \text{ เป็นต้น}$$

เมตริกซ์ทแยงมุม (Diagonal matrix)

คือ เมตริกซ์จัตุรัสซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ ยกเว้นสมาชิกตามแนวทแยงมุมหลัก (Main diagonal) เช่น

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ เป็นต้น}$$

เมตริกซ์ศูนย์ (Zero matrix)

เป็นเมตริกซ์ชนิดพิเศษของเมตริกซ์ทแยงมุม ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวตามแนวทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ เช่น

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ เป็นต้น}$$

เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix)

คือ เมตริกซ์ทแยงมุมซึ่งมีสมาชิกทุกตัวตามแนวทแยงมุมหลักเป็น 1 ใช้สัญลักษณ์ I_n แทนเมตริกซ์เอกลักษณ์ที่มีขนาด $n \times n$ เช่น

$$I_1 = [1], I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ เป็นต้น

คุณสมบัติของเมตริกซ์เอกลักษณ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เป็นเมตริกซ์ใดๆ ที่มีขนาด $n \times n$ แล้ว $AI_n = I_n A = A$ เช่น

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์สมมาตร (Symmetric matrix)

คือ เมตริกซ์ที่เท่ากับทรานสโพสของมัน นั่นคือ $A^t = A$ เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าสมาชิกของเมตริกซ์สมมาตรที่อยู่ใต้และเหนือเส้นทแยงมุมหลักต้องเป็นชุดเดียวกัน และถ้าเป็นเมตริกซ์ตามแนวเส้นทแยงมุมหลัก สมาชิกที่มาทับกันจะต้องเท่ากัน

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า

    1) $(A+B)^t = A^t + B^t$
    2) $(A-B)^t = A^t - B^t$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $(5A)^t = 5A^t$

3. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $(AB)^t = B^t A^t$

4. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ จงแสดงว่า

ก) $AB=-BA$

ข) $(A+B)^2 = A^2+B^2$

5. ถ้า $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}, I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $A^2-4A-5I=0$ (เมตริกซ์ศูนย์)

ตัวกำหนด (Determinant)

ทุกๆ เมตริกซ์จัตุรัส $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ กำหนดด้วยค่าจริงค่าหนึ่งจากเมตริกซ์ A ค่าจริงนี้เรียกว่า ตัวกำหนดของ A หรือดีเทอร์มิแนนท์ A เขียนแทนด้วย $\det(A)$ หรือ $|A|$ ตัวอย่างเช่น

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}$$

การกำหนดค่าของตัวกำหนด

นิยาม 8 ถ้า $A=[a]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 1×1 แล้ว $\det(A)=a$ เช่น $[5]=5$ หรือ $|5|=5, |-3|=-3$

นิยาม 9 ถ้า $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด 2×2 แล้ว

$$\det(A)=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=ad-bc$$

ตัวอย่าง จงหา $\det(A)$ ถ้า $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=(1)(4)-(3)(2)=4-6=-2$$

ตัวอย่าง จงหา $|A|$ กำหนด $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=(2)(3)-(4)(-1)=6+4=10$$

แบบฝึกหัด

1. จงหา $\det(A)$ ถ้า $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$
2. จงหา $|A|$ กำหนด $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}$
3. จงหา $|A|,|B|$ และ $|AB|$ ถ้า $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ พร้อมบอกความสัมพันธ์ระหว่างสาม Determinant นี้

การกระจายด้วยโคแฟกเตอร์

นิยาม กำหนดเมตริกซ์ A ให้ ไมเนอร์ คือ ตัวกำหนดของเมตริกซ์จัตุรัสย่อยใดๆของ A นั่นคือ เมื่อกำหนดเมตริกซ์จัตุรัส A ไมเนอร์ คือ ตัวกำหนดของรูปเมตริกซ์ใดๆจาก A ที่ได้จากการตัดจำนวนแถวและจำนวนหลักที่เท่ากันออก เช่น

$A=\begin{bmatrix}7 & 8 & 9\\ 5 & 6 & 7\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ แล้ว $\begin{vmatrix}7 & 8\\ 3 & 4\end{vmatrix}$ และ $\begin{vmatrix}6 & 7\\ 4 & 5\end{vmatrix}$ เป็นไมเนอร์ของ A แต่ $\begin{vmatrix}7 & 8\\ 4 & 5\end{vmatrix}$ และ $\begin{vmatrix}7 & 8\end{vmatrix}$ ไม่เป็นไมเนอร์ของ A

สิ่งที่ต้องทราบในการหาค่าของตัวกำหนด คือ โคแฟกเตอร์ (Cofactor) ของ สมาชิก เมตริกซ์

นิยาม กำหนดเมตริกซ์ $A=[a_{ij}]$ โคแฟกเตอร์ของสมาชิก a_{ij} คือ จำนวนจริงที่ได้จากการคูณ $(-1)^{i+j}$ ด้วยไมเนอร์ที่ได้จาก A อันเกิดจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ออก

ตัวอย่าง จงหาโคแฟกเตอร์ของสมาชิก 4 ในเมตริกซ์

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

วิธีทำ จะเห็นว่า 4 อยู่ในตำแหน่งแถวที่ 2 หลักที่ 1 เมื่อตัดแถวที่ 2 และหลักที่ 1 ออก จะได้ $\begin{bmatrix}2&3\\8&9\end{bmatrix}$ ซึ่ง $\begin{vmatrix}2&3\\8&9\end{vmatrix}=(2)(9)-(8)(3)=-6$ สมาชิก 4 จึงมี $(-1)^{i+j}=(-1)^{2+1}$ $=(-1)^3=-1$ $\therefore$ โคแฟกเตอร์ของ 4 คือ $(-1)(-6)=6$

ตัวอย่าง จงหา $\det(A)$ กำหนด $A=\begin{bmatrix}2&4&0\\-1&2&1\\2&-5&3\end{bmatrix}$

วิธีทำ กรณีนี้เลือกหลักที่ 3 สำหรับการกระจายด้วยโคแฟกเตอร์

$$\begin{bmatrix}2&4&0\\-1&2&1\\2&5&3\end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}|A|&=0(-1)^{i+j}\begin{vmatrix}-1&2\\2&5\end{vmatrix}+1(-1)^{i+j}\begin{vmatrix}2&4\\2&5\end{vmatrix}+3(-1)^{i+j}\begin{vmatrix}2&4\\-1&2\end{vmatrix}\\&=(0)(-1)^4(-9)+1(-1)^5(2)+3(-1)^6(8)\\&=0-2+24\\&=22\end{aligned}$$

ตัวอย่าง ใช้เมตริกซ์ A หา $\det(A)$ โดยใช้การกระจายด้วยแถวที่ 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$|A| = (-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (2)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 12 + 12 - 2$$
$$= 22$$

ตัวอย่าง จงหา $\det(A)$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

เลือกการกระจายโคแฟกเตอร์ในหลักที่ 2

$$|A| = 0 + 4(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + 2(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

โดย $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9$ ส่วน $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$

(ต้องใช้การกระจายโคแฟกเตอร์ต่ออีกขั้น)

$\therefore \ |A| = -36 - 8 = -44$

แบบฝึกหัด

1. จงหา $|A|$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

2. จงหา $|A|$ ถ้า $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. จงหา $|A|$ ถ้า $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

4. จงหา $|A|$ ถ้า $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5. จงหา $|A|$ ถ้า $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 10 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

ข้อสังเกต

(1) ในการหา $\det(A)$ มิติ 3×3 อาจใช้วิธีการคูณทแยง เช่น

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$$= 0+6+1-0-2-0$$

$$= 5$$

(2) C_{ij} (โคแฟกเตอร์) $=(-1)^{i+j}M_{ij}$

M_{ij} คือ ไมเนอร์ของสมาชิก a_{ij}

ถ้า $i+j$ เป็นจำนวนคู่ $C_{ij}=M_{ij}$

ถ้า $i+j$ เป็นจำนวนคี่ $C_{ij}=-M_{ij}$

คุณสมบัติตัวกำหนด

1) ถ้าแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของเมตริกซ์จัตุรัส A เป็นศูนย์ทั้งหมดแล้ว

$\det(A)=0$ เช่น $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

2) ถ้าสลับแถวคู่ใดคู่หนึ่งหรือหลักคู่ใดคู่หนึ่งแล้ว ตัวกำหนดจะเปลี่ยนเครื่องหมาย

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ สลับแถวที่ 2 กับแถวที่ 3 จะได้

$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ กระจายด้วยแถวที่ 2 จะได้

$|B|=-a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})+a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})-a_{33}(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})$

ดังนั้น $|B|=-|A|$

3) ถ้าสองแถวหรือสองหลักของตัวกำหนด มีสมาชิกเหมือนกันแล้วค่าตัวกำหนดจะเท่ากับศูนย์ เช่น

$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$ $\quad \therefore \begin{matrix} \det(A)=-\det(A) \\ 2\det(A)=2(0)=0 \end{matrix}$

4) ถ้าเมตริกซ์ B ได้จากการคูณเมตริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง k ในหนึ่งแถวของ A แล้ว

$|B|=k|A|$ เช่น $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ และ $A=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ คูณแถวที่ 1 ด้วย 2

$\therefore\ |B|=4, |A|=2$

$\therefore\ |B|=2, |A|=4$

โปรดระวัง $8\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 24 & 32 \end{bmatrix}$

5) สำหรับ $n \times n$ เมตริกซ์ A และจำนวน k ใดๆ $\det(kA) = k^n \det(A)$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \det(A) = 4 - 6 = -2$$

$$k = 2, kA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, \det(A) = 16 - 24 = -8$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} -8 &= 2^2 \det(A) \\ &= 2^2(-2) \\ &= 4(-2) \\ &= -8 \end{aligned}$$

6) ถ้าเมตริกซ์ B เกิดจากเมตริกซ์ A ใด การบวกสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของ A ด้วยจำนวนจริงคูณด้วยสมาชิกในแถวหรือหลักอื่นๆ ของ A แล้ว $|A| = |B|$ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad \therefore \det(A) = -3$$

นำ 2 ไปคูณแถว 2 แล้วบวกด้วยแถว 1

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \qquad \therefore \det(A) = -3$$

7) $\det(A) = \det(A^t)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = -2 \qquad \det(A^t) = -2$$

8) ถ้า A และ B มีขนาดเดียวกันแล้ว $\det(A) \cdot \det(B) = \det(AB)$ เช่น

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad \therefore \det(A)=-2$$

$$B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix} \qquad \therefore \det(B)=-2$$

$$AB=\begin{bmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{bmatrix} \qquad \therefore \det(AB)=4$$

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงคุณสมบัติ $\det(kA)=k^n\det(A)$ เมื่อ $k\in R$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

2. จงแสดงคุณสมบัติ $\det(A)\cdot\det(B)=\det(AB)$

$$A=\begin{bmatrix}6 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

3. จงแสดงว่า

$$\begin{vmatrix}2a & 3r & x\\ 4b & 6s & 2y\\ -2c & -3t & -z\end{vmatrix}=-12\begin{vmatrix}a & r & x\\ b & s & y\\ c & t & z\end{vmatrix}$$

(โดยไม่ต้องกระจายโคแฟกเตอร์)

(เฉลยข้อ 3)

$$\begin{vmatrix}2a & 3r & x\\ 4b & 6s & 2y\\ -2c & -3t & -z\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}a & 3r & x\\ 2b & 3s & 2y\\ -c & -3t & -z\end{vmatrix}$$ (2 คูณหลักที่ 1 คุณสมบัติข้อ 4)

$$=2\times 2\begin{vmatrix} a & 3r & x \\ b & 3s & y \\ -c & -3t & -z \end{vmatrix} \qquad \text{(2 คูณแถวที่ 2)}$$

$$=2\times 2\times 3\begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ -c & -t & -z \end{vmatrix} \qquad \text{(3 คูณหลักที่ 2)}$$

$$=\underbrace{2\times 2\times 3\times(-1)}_{-12}\begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix} \qquad \text{(-1 คูณแถวที่ 3)}$$

กฎของคราเมอร์ (Cramer's rule)

กฎนี้ใช้สำหรับแก้ระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมตริกซ์ AX= B พิจารณาระบบสมการ ถ้า

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

เมื่อเราต้องการหา x_1, x_2, x_3 แล้วคาร์เมอร์ กล่าวว่า

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{31} \\ a_{21} & b_2 & a_{32} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|} \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

นั่นคือ การ x_1 ก็คือการแทนที่หลัก 1 ของ A ด้วยสมาชิกของเมตริกซ์ B

x_2 ก็คือการแทนที่หลัก 2 ของ A ด้วยสมาชิกของเมตริกซ์ B

x_3 ก็คือการแทนที่หลัก 3 ของ A ด้วยสมาชิกของเมตริกซ์ B

ข้อพึงระวัง (1) $|A| \neq 0$

(2) จำนวนตัวแปรต้องเท่ากับจำนวนสมการ

ตัวอย่าง จงแก้สมการ

$$x+y-z=2$$
$$3x+y=5$$
$$4x+y=1$$

วิธีทำ เขียนเป็นสมการเมตริกซ์ AX = B คือ

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 1\end{bmatrix}$$

$$|A|=1$$

จากกฎคราเมอร์ จะได้

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 5 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}}{1}=\frac{-4}{1}=-4$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}}{1}=\frac{17}{1}=17$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 5\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}}{1}=\frac{11}{1}=11$$

ดังนั้น $x=-4, y=17, z=11$

ตัวอย่าง จงแก้สมการ

$$
\begin{aligned}
x + 2y - 3z + w &= 1 \\
3y + 5z + w &= 2 \\
2x + 4y + z - 2w &= 3 \\
x + 3z + 2w &= 4
\end{aligned}
$$

วิธีทำ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$|A| = 147$

จากกฎคราเมอร์ จะได้

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{147} = \frac{291}{147} = 1.98$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{147} = \frac{-18}{147} = -0.122$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{147} = \frac{57}{147} = 0.388$$

$$w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{147} = \frac{63}{147} = 0.429$$

$\therefore x = 1.98, y = -0.122, z = 0.388, w = 0.429$

แบบฝึกหัด

จงแก้สมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

1)

$$2x-3y=-1$$
$$x+4y=5$$

2)

$$2x+3y=-2$$
$$3x+6y=3$$

3)

$$x+2y+3z=5$$
$$4x+5y-3z=4$$
$$7x+2y+z=6$$

4)

$$3x+3y+2z=0$$
$$x+2y+4z=0$$
$$5x-2y-3z=0$$

5)

$$x-2y+z=-1$$
$$3x+y-2z=4$$
$$y-z=1$$

เมตริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix)

นิยาม เมตริกซ์ผกผันของเมตริกซ์ A ขนาด $n\times n$ คือ เมตริกซ์ B ขนาด $n\times n$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า AB = BA = I

B จะเรียกว่าเป็น เมตริกผกผันของ A แทนด้วย A^{-1} ถ้าเมตริกซ์จัตุรัส A มีเมตริกซ์ผกผันจะเรียกว่าเป็น “nonsingular matrix” (เมตริกซ์มิใช่เอกฐาน) เช่น

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}$$

ซึ่งทำให้ $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง จงหา A^{-1} (ถ้ามี) จาก $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

สมมติให้ $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ผกผันของ A ซึ่งทำให้ AB = BA = I

นั่นคือ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}a & b\\ 3a+2c & 3b+2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore a=1, b=0$$
$$3a+2c=0$$
$$3b+2d=1$$

แก้สมการ

$$3(1)+2c=0 \quad \therefore c=-1.5$$
$$3(0)+2d=1 \quad \therefore d=0.5$$
$$\therefore B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

หมายเหตุ ควรทดสอบด้วยว่า

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1.5 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1.5 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$ หรือไม่

ตัวอย่าง จงหา A^{-1} เมื่อ $A=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

สมมติ $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6a+4c & 6b+4d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 6a+4c=1 \qquad 6b+4d=0$$
$$3a+2c=0 \qquad 3b+2d=1$$

ไม่สามารถแก้สมการหา a, b, c, d ได้ แสดงว่า A ไม่มี A^{-1}

$\therefore A$ เป็น Singular matrix

จากนิยามเมตริกซ์ผกผัน $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}adjA \;\; ,|A|\neq 0$

$adjA$ หมายถึง เมตริกซ์ผกผัน ก็คือ ทรานสโพสของโคแฟกเตอร์ของ A

$adjA=(A^c)^t$ $\quad A^c$ คือ โคแฟกเตอร์เมตริกซ์ A

A^c หาจากการแทนที่แต่ละสมาชิกของ A มีขนาด $n\times n$ ด้วยโคแฟกเตอร์ของตัวมันเอง เช่น

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^c=\begin{bmatrix} (-1)^2|4| & (-1)^3|3| \\ (-1)^3|2| & (-1)^4|1| \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore adjA=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adjA$$

$$|A|=-2$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง จงหา A^{-1} ถ้า $A=\begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$|A|=-8\neq 0$ เพราะฉะนั้นหา A^{-1} ได้ $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}adjA$

$adjA=(A^c)^t$ โดยที่ $A^c=\begin{bmatrix} -8 & 4 & -4 \\ 8 & -5 & 1 \\ 16 & -10 & 10 \end{bmatrix}$

$$adjA=\begin{bmatrix} -8 & 8 & 16 \\ 4 & -5 & -10 \\ -4 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -0.5 & 0.625 & 1.25 \\ 0.5 & -0.125 & -1.25 \end{bmatrix}$$

แบบฝึกหัด

1. จงตรวจดูว่าเมตริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมตริกซ์ที่หา Inverse ได้หรือไม่ถ้าหาได้จงหา Inverse matrix นั้น

1.1) $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

1.2) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

1.3) $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{bmatrix}$

1.4) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

1.5) $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 4 & 0 & 2\\ 3 & 10 & 3\end{bmatrix}$

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยเมตริกซ์ผกผัน

ให้ AX = B เป็นเมตริกซ์ที่แทนระบบสมการเชิงเส้น โดยที่ A มีขนาด $n\times n$ ถ้า A เป็นเมตริกซ์ที่มีตัวผกผันหรือมี A^{-1} แล้ว

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$
$$I_nX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการด้วยเมตริกซ์ผกผัน

$$x-3y=-8$$
$$-2x+y=2$$

วิธีทำ $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-8\\ 2\end{bmatrix}$

จากสูตร $X = A^{-1}B$

หา $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA$

$$=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-0.2 & -0.6\\ -0.4 & -0.2\end{bmatrix}$$

$$\therefore X=\begin{bmatrix}-0.2 & -0.6\\ -0.4 & -0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8\\ 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.4\\ 2.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$\therefore x=0.4, y=2.8$$

ตัวอย่าง จงหาค่า x, y, z จากระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2 \\ 2y + 3z &= -2 \\ 3x + 4y - z &= 2 \end{aligned}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1.286 & -0.571 & -0.429 \\ -0.957 & 0.714 & 0.286 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = A^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1.286 & -0.571 & -0.429 \\ -0.857 & 0.714 & 0.286 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \\ 2.857 \\ -2.571 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = -4, y = 2.857, z = -2.571$$

แบบฝึกหัด

จงใช้ตัวผกผันในการแก้ระบบสมการต่อไปนี้

1)

$$2x + y = 3$$
$$x - 3y = 5$$

2)

$$x + 2y = 4$$
$$2x - y = 3$$

3)

$$x + y + z = 2$$
$$x - 2y - 4z = 3$$
$$2x + y + 3z = 5$$

4)

$$3x + 2y - z = 2$$
$$-x + 2y - z = -2$$
$$2x - 5y = 3$$

5)

$$x_1 + x_2 = 4$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$