ปริพันธ์

การหาอนุพันธ์ เป็นการดำเนินการแบบหนึ่งกับฟังก์ชัน กล่าวคือ เราหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ผลคือ ฟังก์ชัน $f'(x)$ ในทางกลับกัน ถ้ามี $f'(x)$ การดำเนินการกับ $f'(x)$ เพื่อให้ได้ $f(x)$ เรียกว่า “การหาปริพันธ์”

นิยาม ฟังก์ชัน F เป็นปริพันธ์ของ f เมื่อ $f'(x)$ หาค่าได้ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

นิยาม เมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์ เป็นสับเซตของจำนวนจริงและ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เขียนแทนด้วย $\int f(x)dx$ โดยที่ $\int f(x)dx = F(x)+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

จากบทนิยาม เรียกกระบวนการ $\int f(x)dx$ ว่า “การอินทิเกรต”

เครื่องหมาย $\int$ เรียกว่า เครื่องหมาย อินทิกรัล

เรียก $f(x)$ ว่าตัวถูกอินทิเกรต และ

dx เป็นสัญลักษณ์ที่บอกว่า การอินทิเกรตนี้เทียบกับตัวแปร x

ทฤษฎีบท ถ้า c , k เป็นค่าคงที่

1. $\int dx = x + c$
2. $\int kdx = kx + c$
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ $n \neq -1$

หมายเหตุ

1. $\int [f(x) \bullet g(x)]dx \neq \int f(x)\,dx \bullet \int g(x)\,dx$
2. $\int \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]dx \neq \dfrac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของการอินทิเกรต

1. $\int 2\ dx$ ***วิธีทำ*** $\int 2\ dx = 2x+c$

2. $\int x^4 dx$ ***วิธีทำ*** $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1}+c = \frac{x^5}{5}+c$

3. $\int 4x^3 dx$ ***วิธีทำ*** $\int 4x^3 dx = 4\int x^3 dx = 4\left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right]+c$

$$= 4\left[\frac{x^4}{4}\right]+c = x^4+c$$

4. $\int \left(8x^7+5x^4\right)\ dx$

วิธีทำ $\int \left(8x^7+5x^4\right)\ dx = \int 8x^7 dx+\int 5x^4 dx$

$$= 8\int x^7 dx+5\int x^4 dx$$

$$= 8\left[\frac{x^{7+1}}{7+1}\right]+5\left[\frac{x^{4+1}}{4+1}\right]+c$$

$$= 8\left[\frac{x^8}{8}\right]+5\left[\frac{x^5}{5}\right]+c$$

$$= x^8+x^5+c$$

5. $\int \left(x^3-x\right)\ dx$ ***วิธีทำ*** $\int \left(x^3-x\right)dx = \int x^3 dx-\int x\ dx$

$$= \left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right]-\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right]+c$$

$$= \frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+c$$

6. $\int \frac{1}{x^2}\ dx$ ***วิธีทำ*** $\int \frac{1}{x^2}\ dx = \int x^{-2}\ dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}+c$

$$= \frac{x^{-1}}{-1}+c = \frac{-1}{x}+c$$

7. $\int \left(2x+3-\frac{2}{x^3}\right)\ dx$

วิธีทำ $\int\left(2x+3-\frac{2}{x^3}\right)\,dx = \int\left(2x+3-2x^{-3}\right)\,dx$

$$= \int 2x\ dx + \int 3\ dx - \int 2x^{-3}dx$$

$$= 2\int x\ dx + 3\int\ dx - 2\int x^{-3}dx$$

$$= 2\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right] + 3(x) - 2\left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right] + c$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right] + 3(x) - 2\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right] + c$$

$$= x^2 + 3x + x^{-2} + c$$

$$= x^2 + 3x + \frac{1}{x^2} + c$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่า $\int (x^2 - 2x - 3)\ dx$
2. จงหาค่า $\int \sqrt{x}\ dx$
3. จงหาค่า $\int (x+1)(x+2)\ dx$
4. จงหาค่า $\int\left(5x^4 - 1 + \frac{3}{x^4}\right)\ dx$
5. จงหาค่า $\int\left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{3}}\right)\ dx$

ปริพันธ์จำกัดเขต

ถ้าให้ $F(x)$ เป็นปริพันธ์ของ f(x) อินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันต่อเนื่อง f บนช่วง x = a ถึง x = b คือ

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

เมื่อ $F'(x) = f(x)$ เรียก a ว่า ขอบล่าง และ เรียก b ว่า ขอบบน

หมายเหตุ: การหาปริพันธ์จำกัดของฟังก์ชัน ไม่จำเป็น บวกค่า c เข้าไป เนื่องจาก เมื่อแทนค่า x = a และ x = b ใน $F(x)$ แล้ว $F(b) - F(a)$ ค่า c จะลบกันหมดไป

คุณสมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขต

1. $\int_a^a f(x)\ dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$
3. $\int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx$

ตัวอย่าง จงหาค่า

1. $\int_0^3 x^2 dx$

วิธีทำ
$$\int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^{2+1}}{2+1}\right]_0^3 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

2. $\int_1^2 x^4 dx$

วิธีทำ
$$\int_1^2 x^4 dx = \left[\frac{x^{4+1}}{4+1}\right]_1^2 = \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{(2)^5}{5} - \frac{(1)^5}{5}$$
$$= \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = = \frac{31}{5}$$

3. $\int_2^3 4x^3 dx$

วิธีทำ $\int_2^3 4x^3 dx = 4\int_2^3 x^3 dx = 4\left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right]_2^3$

$= 4\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^3 = \left[x^4\right]_2^3 = (3)^4-(2)^4$

$= 81-16 = 65$

4. $\int_1^2 \left(x^3-x\right)dx$

วิธีทำ $\int_1^2 \left(x^3-x\right)dx = \int_1^2 x^3 dx - \int_1^2 x\, dx$

$= \left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right]_1^2 - \left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right]_1^2$

$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$= \left[\frac{(2)^4}{4}-\frac{(1)^4}{4}\right]-\left[\frac{(2)^2}{2}-\frac{(1)^2}{2}\right]$

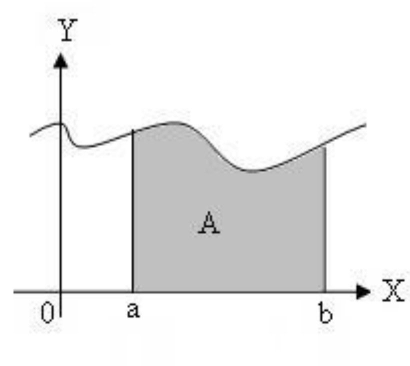
$= \left[\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right]-\left[\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right] = \frac{15}{4}-\frac{3}{2}$

$= \frac{15-6}{4} = \frac{9}{4}$

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] และ $f(x)\geq 0$ แล้วพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y=f(x)$ แกน X, เส้นตรง $x=a$ และ เส้นตรง $x=b$ คือ

$$\text{พื้นที่ (A)} = \int_a^b f(x)\,dx$$



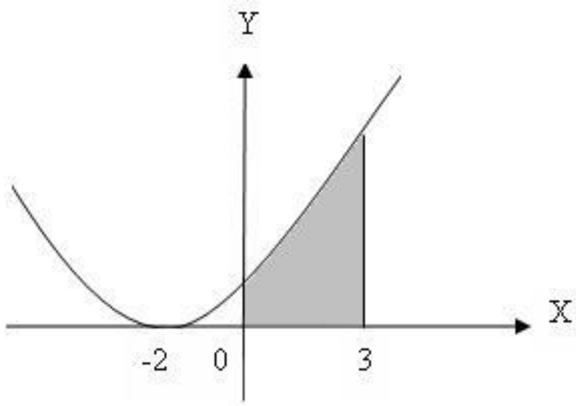
หลักการ

1. เขียนกราฟของสมการที่โจทย์กำหนดมาให้ทุกครั้ง
2. หาขอบเขตที่กำหนดพื้นที่ (ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง กับแกน x)
3. นำสมการมาอินทิเกรต แล้วใส่ขอบเขต
   - ถ้า พื้นที่มีค่าเป็นบวก ช่วงกราฟอยู่เหนือแกน x
   - ถ้า พื้นที่มีค่าเป็นลบ ช่วงกราฟอยู่ใต้แกน x

พื้นที่จะมีค่าเป็นบวกเสมอ เครื่องหมายของผลอินทิเกรตเป็นการบอกว่ากราฟอยู่ในช่วงใด

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $f(x) = x^2 + 4x + 4$ กับแกน x ในช่วง $x = 0$ ถึง $x = 3$

วิธีทำ เขียนกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = x^2 + 4x + 4$ และขอบเขตพื้นที่ ที่โจทย์ต้องการ



$$\text{พื้นที่ A} = \int_0^3 f(x)\ dx$$

$$= \int_0^3 \left(x^2 + 4x + 4\right) dx$$

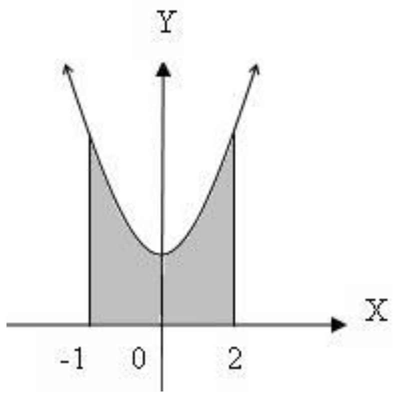
$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{(3)^3}{3} + 2(3)^2 + 4(3)\right] - 0$$

$$= 39$$

ตัวอย่าง จงหาพื้นทบดลอมดวยเสนเคง $f(x) = x^2 + 5$ กบแกน x เนชวง $x = -1$ ถึง $x = 2$

วิธีทำ เขียนกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = x^2 + 5$ และขอบเขตพื้นที่ที่โจทย์ต้องการ



$$\text{พื้นที่ A} = \int_{-1}^{2} f(x)\ dx$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(x^2 + 5\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 5x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \left[\frac{(2)^3}{3} + 5(2)\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} + 5(-1)\right]$$

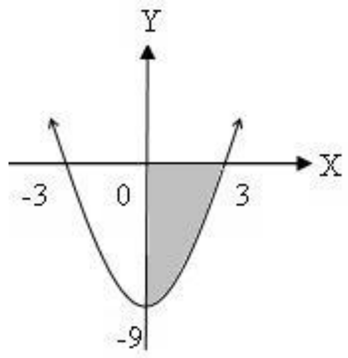
$$= \left[\frac{8}{3} + 10\right] - \left[\frac{-1}{3} - 5\right]$$

$$= \frac{8}{3} + 10 + \frac{1}{3} + 5$$

$$= 15 + \frac{9}{3} \ = \ 15 + 3 \ = \ 18$$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $f(x) = x^2 - 9$ กับแกน x ในช่วง $x = 0$ ถึง $x = 3$

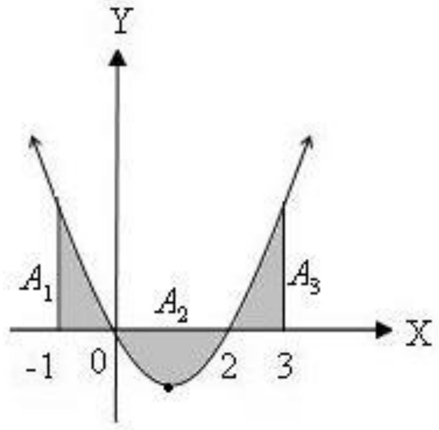
วิธีทำ เขียนกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = x^2 - 9$ และขอบเขตพื้นที่ ที่โจทย์ต้องการ



$$
\begin{aligned}
\text{พื้นที่ A} &= \int_0^3 f(x)\ dx \\
&= \int_0^3 \left(x^2 - 9\right)\ dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} - 9x\right]_0^3 \\
&= \left[\frac{(3)^3}{3} - 9(3)\right] - \left[\frac{(0)^3}{3} - 9(0)\right] \\
&= \left[\frac{27}{3} - 27\right] - \left[\frac{0}{3} - 0\right] \\
&= 9 - 27 - 0 \\
&= -18
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $f(x) = x^2 - 2x$ กับแกน x ในช่วง $x = -1$ ถึง $x = 3$

วิธีทำ เขียนกราฟของเส้นโค้ง $f(x) = x^2 - 2x$ และขอบเขตพื้นที่ ที่โจทย์ต้องการ



พื้นที่ A = $\int_{-1}^{3} f(x)\ dx$

แยกคิดเป็นพื้นที่ A_1 , A_2 , A_3

$$A_1 = \int_{-1}^{0}\left(x^2-2x\right) dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}$$

$$=0-\left[\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2\right]$$

$$=0-\left[\frac{-1}{3}-1\right]=0-\left[\frac{-1}{3}-\frac{3}{3}\right]=0-\left[\frac{-4}{3}\right]$$

$$=\frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{0}^{2}\left(x^2-2x\right) dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\left[\frac{(2)^3}{3}-(2)^2\right]-0$$

$$=\left[\frac{8}{3}-4\right]-0 \quad = \quad \left[\frac{8}{3}-\frac{12}{3}\right]-0$$

$$=\left[-\frac{4}{3}\right] \quad = \quad \frac{4}{3}$$

$$A_3 = \int_{2}^{3}\left(x^2-2x\right)dx \quad = \left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3 = \left[\frac{(3)^3}{3}-(3)^2\right]-\left[\frac{(2)^3}{3}-(2)^2\right]$$

$$= \left[\frac{27}{3}-9\right]-\left[\frac{8}{3}-4\right] \quad = \quad \frac{4}{3}$$

พื้นที่ A = $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ = $A_1 + A_2 + A_3$ = $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}$ = $\frac{12}{3}$ = 4

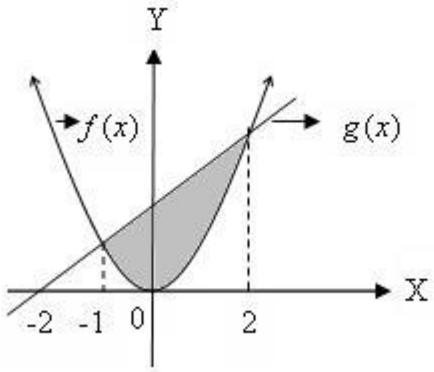
พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $f(x) \ge g(x)$ บนช่วงปิด [a,b] แล้วพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ ตั้งแต่ $x = a$ ถึง $x = b$ คือ

$$\text{พื้นที่ (A)} = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $f(x) = x+2$ และ เส้นโค้ง $g(x) = x^2$

วิธีทำ เขียนกราฟของเส้นตรง $f(x) = x+2$ และ เส้นโค้ง $g(x) = x^2$



จุดตัดของกราฟ คือ (-1, 1) และ (2, 4)

โจทย์ไม่ได้ขอบเขตมาให้แต่พื้นที่ปิดล้อม อยู่ในช่วง $x = -1$ ถึง $x = 2$

พื้นที่ (A) = $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

$= \int_{-1}^{2} \left[(x+2) - x^2\right] dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$

$= \left[\frac{(2)^2}{2} + 2(2) - \frac{(2)^3}{3}\right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right]$

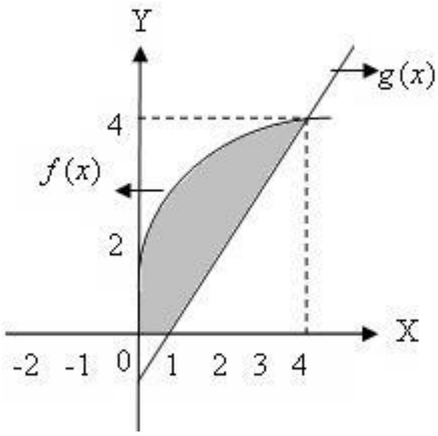
$=$

$\left[\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3}\right] - \left[\frac{1}{2} - 2 - (-\frac{1}{3})\right] = \left[\frac{12+24-16}{6}\right] - \left[\frac{3-12+2}{6}\right]$

$= \left[\frac{20}{6}\right] - \left[\frac{-7}{6}\right] = \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วย เส้นโค้ง $f(x) = \sqrt{x} + 2$ และ เส้นตรง $g(x) = \frac{4}{3}(x-1)$

วิธีทำ เขียนกราฟของเส้นตรง $f(x) = \sqrt{x} + 2$ และ เส้นโค้ง $g(x) = \frac{4}{3}(x-1) = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$



จุดตัดของกราฟ คือ (0, 2) และ (4, 4)

โจทย์ไม่ได้ขอบเขตมาให้แต่พื้นที่ปิดล้อม อยู่ในช่วง $x = 0$ ถึง $x = 4$

พื้นที่ (A) = $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

$= \int_0^4 \left[\left(\sqrt{x}+2\right)-\left(\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}\right)\right] dx$

$= \int_0^4 \left[x^{\frac{1}{2}}+2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}\right] dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x-\frac{4}{6}x^2+\frac{4}{3}x\right]_0^4$

$= \left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}+2(4)-\frac{4}{6}(4)^2+\frac{4}{3}(4)\right]-0$

$= \frac{2}{3}(8)+2(4)-\frac{4}{6}(16)+\frac{4}{3}(4)$

$= \frac{16}{3}+8-\frac{32}{3}+\frac{16}{3}$ = $\frac{16}{3}+\frac{24}{3}-\frac{32}{3}+\frac{16}{3}$

$= \frac{16+24-32+16}{3}$

$= \frac{24}{3}$

= 8

แบบฝึกหัด

จงหาค่า

1. $\int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\right)dx$

2. $\int_0^1 \left(3+2x\right)\,dx$

3. $\int_{-1}^1 \left(3x^2-2x-3\right)\,dx$

4. ถ้า $f'(x)=\sqrt{x}+3$ จงหา $f(x)$

5. ถ้า $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ และ $f(1)=2$ จงหา $f(x)$

6. ถ้า $f''(x)=2$, $f'(0)=3$ และ $f(2)=11$ จงหา $f(x)$

7. ให้ กำหนด $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{, เมื่อ } 0\le x\le 1 \\ \sqrt{x} & \text{, เมื่อ } 1\le x\le 2 \end{cases}$ จงหาค่า $\int_0^2 f(x)\ dx$

8. กำหนด ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(2)=-1$, $f'(1)=-3$ และ $f''(x)=3$ ทุกค่าของ x แล้ว $f(0)$ มีค่าเท่าใด

9. กำหนดให้ กราฟของ $y=f(x)$ มีความชันที่จุด (x,y) ใดๆ เป็น $2x+2$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ -3 พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย กราฟของ $y=f(x)$ แกน x เส้นตรง $x=-1$ และ เส้นตรง $x=0$ เท่ากับเท่าใด

10. ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=f(x)$ ที่จุด (x, y) ใดๆ เป็น $2x-4$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 10 หน่วย แล้ว พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y=f(x)$ แกน x จาก $x=0$ ถึง $x=3$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้