บทที่ 5

การหาค่าที่เหมาะสม กรณีตัวแปรอิสระหนึ่งตัวแปร

วัตถุประสงค์

1) สามารถอธิบายความหมายของจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดเฉพาะที่
2) สามารถอธิบายความหมายและคำนวณหาอนุพันธ์ลำดับที่ 1 และลำดับที่ 2
3) สามารถทดสอบจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดด้วยอนุพันธ์ลำดับที่ 2
4) สามารถประยุกต์ใช้แนวคิดอนุพันธ์กับกำไรสูงสุด ทฤษฎีการผลิต ทฤษฎีต้นทุน

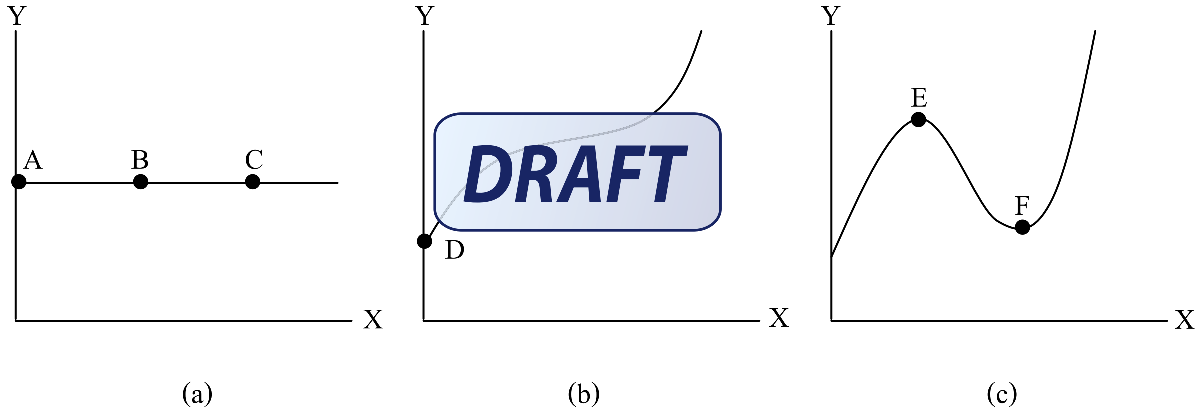
ตามที่เราได้ศึกษากันมาในนิยามเศรษฐศาสตร์ ที่ว่าด้วยการจัดสรรทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัดเพื่อนสนองความต้องการหรือเพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ที่เกิดประโยชน์สูงสุด คำถามก็คือว่าแล้วเราจะมีวิธีจัดสรรอย่างไร หรือมีเครื่องมืออะไรมาจัดสรรให้เกิดประโยชน์สูงสุด หลักการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (Optimization) จึงเป็นเครื่องมือสำคัญในการแสวงหาคำตอบดังกล่าว เช่น การศึกษาพฤติกรรมผู้บริโภคซึ่งมุ่งไปที่ความพอใจสูงสุด หรือ อรรถประโยชน์สูงสุด (Maximized utility) ส่วนผู้ผลิตหรือผู้ขายก็มุ่งที่จะได้กำไรสูงสุด (Maximized profit) หรือ ผลิตด้วยต้นทุนต่ำสุด (Least cost combination) ส่วนภาครัฐก็อาจจะสนใจว่าภาษีอัตราเท่าใด จึงจะทำให้รัฐเก็บภาษีได้สูงสุด หากมองในภาพรวมทั้งประเทศก็ต้องการที่จะให้เกิดสวัสดิการสูงสุด (Social welfare maximization) ก่อนที่จะศึกษาในรายละเอียดต่างๆ จำเป็นที่ต้องทราบแนวคิดเกี่ยวกับอนุพันธ์ เพื่อจะได้นำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางเศรษฐศาสตร์ ดังนี้

5.1 จุดสูงสุด และต่ำสุดเฉพาะที่

ถ้าฟังก์ชันเป้าหมายเป็นฟังก์ชันคงที่ดังในแผนภาพ 5.1.1 (a) ค่า x ทุกค่าจะให้ค่า y เหมือนกัน จุด a, b, c จึงเป็นจุดสูงสุดหรือต่ำสุดก็ได้ หรืออาจจะไม่ใช่ทั้ง 2 อย่าง กรณีนี้จึงไม่มีคำตอบใดของ x ที่ทำให้ได้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุด

กรณีรูป 5.1.1 (b) ฟังก์ชันเป็นแบบเพิ่ม และไม่มีค่าสูงสุด แต่ก็สามารถเห็นได้ว่า จุด d นั้นคือค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนี้ ซึ่งเรียกว่า “absolute or global minimum”

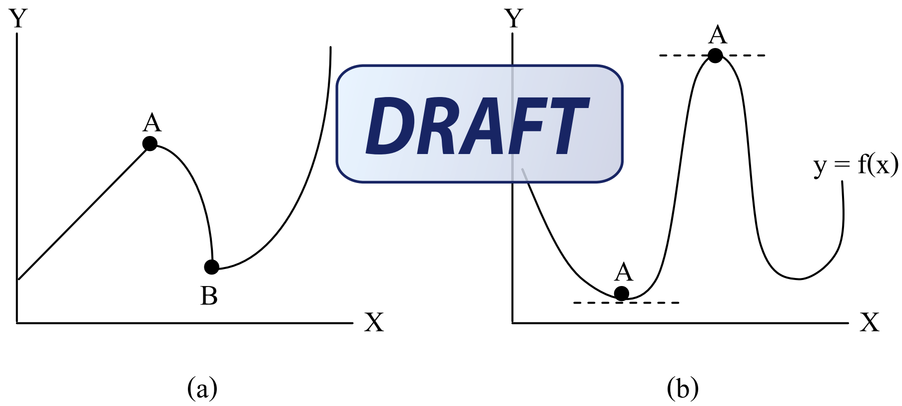
กรณีรูป 5.1.1 (c) เป็นภาพที่แสดงค่าสูงสุดหรือต่ำสุดเฉพาะที่หรือที่ต้องเปรียบเทียบกับจุดอื่น (relative or Local) ที่จุด E อาจจะไม่ใช่ global maximum หรือที่จุด F ก็อาจจะไม่ใช่ global minimum ถ้าเราสามารถทราบจุดสูงสุดหรือต่ำสุดเฉพาะที่ เราก็จะเลือกจุดต่างๆเหล่านี้ที่มีค่ามากสุด เพื่อให้ได้ absolute maximum



ภาพ 5.1.1 จุดสูงสุด จุดต่ำสุด

5.1.1 การทดสอบอนุพันธ์ลำดับที่ 1 (First-order derivative test)

กำหนดฟังก์ชัน y = f(x) ดังนั้น อนุพันธ์อันดับที่ 1 คือ $f'(x)$ ถ้าค่าสูงสุดสัมพันธ์ (Relative extremum) ของฟังก์ชันเกิดขึ้นที่ $x = x_0$ ดังนั้น ประการที่หนึ่ง $f'(x_0)$ อาจจะหาไม่ได้ และประการที่สอง $f'(x_0) = 0$ กรณีแรกดังรูป 5.1.2 (a) ถ้าจุด A และ B แสดงค่าสูงสุดต่ำสุดที่สัมพัทธ์กันและไม่สามารถหาอนุพันธ์กรณีเช่นนี้ได้ ภาพ 5.1.2 (b) แสดงค่าสูงสุด ที่จุด D และต่ำสุดที่จุด C ซึ่งสามารถหา $f'(x_1) = 0$ และ $f'(x_2) = 0$

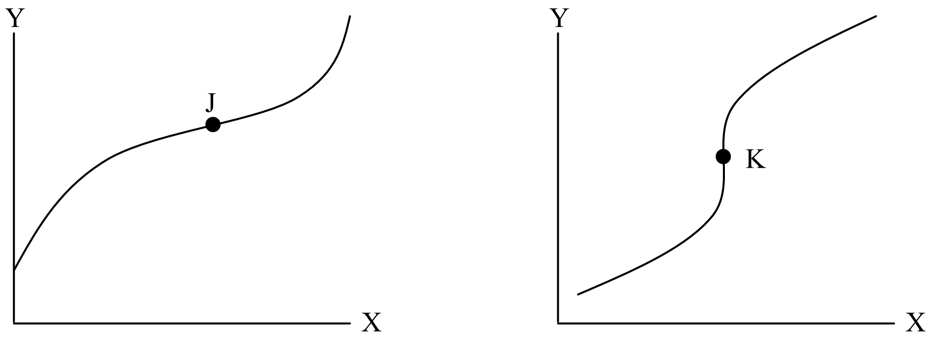


ภาพ 5.1.2 ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ไม่ได้ (a) และ ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ (b)

5.1.2 การทดสอบหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ถ้า $x = x_0$ โดยที่ $f'(x_0) = 0$ ดังนั้นค่า x_0 จะเป็นค่าสูงสุดเมื่อค่า $f'(x)$ เปลี่ยนจากเครื่องหมาย + เป็น – จากซ้ายไปขวา ถ้า $x = x_0$ และ $f'(x_0) = 0$ ค่า x_0 จะเป็นค่าสูงสุดเมื่อค่า $f'(x)$ เปลี่ยนจากเครื่องหมาย – เป็น + จากซ้ายไปขวา กรณีนี้ x_0 จะเรียกว่า “Critical value” และ $f(x_0)$ จะเรียกว่า “Stationary value” กรณีไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด ถ้า $f'(x)$ มีเครื่องหมายเหมือนกันจากการเปลี่ยนจากซ้ายไปขวา ดูภาพ 5.1.3 ลักษณะจุด J และ K จะเรียกว่า “Inflection point” หรือจุดเปลี่ยนเว้า

สรุปได้ว่าการใช้อนุพันธ์ลำดับที่ 1นั้นเป็นขั้นตอนแรกในการพิจารณาว่าจุดที่ได้นั้นเป็นจุดสูงสุด จุดต่ำสุด หรือ จุดเปลี่ยนเว้า อย่างใดอย่างหนึ่ง



(a) (b)

ภาพ 5.1.3 จุดเปลี่ยนเว้า

ตัวอย่าง 5.1.1

$$y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 8$$

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$$

หา $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 24x + 36 = 0$$

$x_1^* = 6 \quad x_2^* = 2$ เรียกค่านี้ว่า “Critical value”

โดย $f'(6) = 0$ และ $f(6) = 8$

$f'(2) = 0$ และ $f(2) = 40$

เมื่อแทนค่า $x < 6$ แล้ว $f'(x) < 0$ กับ $x > 6$ แล้ว $f'(x) > 0$, f(6) = 8 ก็จะได้ค่าเป็น ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เช่นเดียวกันเมื่อ $x < 2, f'(x) > 0$ และเมื่อ $x > 2, f'(x) < 0$, f(2) = 40 ก็จะได้เป็นค่าสูงสุดสัมพันธ์

ตัวอย่าง 5.1.1 จงหาค่าสูงสุด หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต้นทุน (AC) ต่อไปนี้

$$AC = f(Q) = Q^2 - 5Q + 8$$
$$f'(Q) = 2Q - 5$$
$$f'(Q) = 0$$
$$\therefore Q^* = 2.5$$

แทนค่า $Q < 2.5$ หา $f'(Q) < 0$

$Q > 2.5$ หา $f'(Q) > 0$

ดังนั้น จะได้ค่า f(2.5) = 1.75 เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหา Stationary value ของฟังก์ชันต่อไปนี้ ตรวจสอบดูว่าจุดดังกล่าวเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ จุดต่ำสุดสัมพันธ์ หรือจุดเปลี่ยนเว้า

(ก) $y = -2x^2 + 8x + 7$

(ข) $y = 5x^2 + x$

(ค) $y = 3x^2 + 3$

(ง) $y = 3x^2 - 6x + 2$

2. จงหา Stationary value และตรวจสอบเหมือนกับข้อ 1

(ก) $y = x^3 - 3x + 5$

(ข) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 10$

(ค) $y = -x^3 + 4.5x^2 - 6x + 6$

5.2 อนุพันธ์ลำดับที่สองหรือสูงกว่า

การหาอนุพันธ์ลำดับที่สองจะช่วยในการหาคำตอบว่า เป็นค่าสูงสุด หรือต่ำสุดเฉพาะที่ (Local) สัญลักษณ์ที่ใช้ที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้ คือ

$$f''(x) \text{ หรือ } \frac{d^2y}{dx^2}$$

ทราบว่า $f'(x)$ เป็นการวัดอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $f(x)$

$f''(x)$ จึงเป็นการวัดการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน $f'(x)$

หรือ $f''(x)$ จึงเป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$

(1) $f'(x_0) > 0$ หมายถึง ค่าของฟังก์ชันมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น

(2) $f'(x_0) < 0$ หมายถึง ค่าของฟังก์ชันมีแนวโน้มลดลง

(3) $f''(x_0) > 0$ หมายถึง ความชันของเส้นโค้ง มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น

(4) $f''(x_0) < 0$ หมายถึง ความชันของเส้นโค้งมีแนวโน้มลดลง

หรือ อาจจะสรุปได้ว่า

ถ้า $f'(x_0) > 0$ และ $f''(x_0) > 0$ ฟังก์ชันกำลังเพิ่มในอัตราเพิ่มขึ้น

ถ้า $f'(x_0) > 0$ และ $f''(x_0) < 0$ ฟังก์ชันกำลังเพิ่มในอัตราที่ลดลง

ถ้า $f'(x_0) < 0$ และ $f''(x_0) > 0$ ฟังก์ชันกำลังลดลงในอัตราที่เพิ่มขึ้น

ถ้า $f'(x_0) < 0$ และ $f''(x_0) < 0$ ฟังก์ชันกำลังลดแต่ในอัตราที่ลดลง

ตัวอย่าง 5.2.1

ฟังก์ชัน $y = f(x) = x^4$ สามารถหาอนุพันธ์ลำดับที่ 1 และ 2 ได้ดังนี้

$y' = f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2$

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหา $f''(x)$ และ $f'''(x)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

(ก) $ax^2 + bx + c$

(ข) $7x^4 - 3x - 4$

(ค) $\dfrac{3x}{1-x}$ $, x \neq 1$

(ง) $\dfrac{1+x}{1-x}$ $, x \neq 1$

2. ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็น Quadratic function ที่เป็นแบบ strictly convex หรือไม่

(ก) $y = ax^2 - 4x + 8$

(ข) $w = -3x^2 + 39$

(ค) $u = 9 - 2x^2$

(ง) $v = 8 - 5x + x^2$

5.3 การทดสอบอนุพันธ์อันดับสอง

ถ้า $f'(x_0)=0, f(x_0)$ จะเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ เมื่อ $f''(x_0)<0$

จะเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เมื่อ $f''(x_0)>0$

ตัวอย่าง 5.3.1

$$y=f(x)=4x^2-x$$

$$f'(x)=8x-1 \quad \text{และ} \quad f''(x)=8$$

ให้ $f'(x)=8x-1=0 \quad \therefore x^*=\frac{1}{8}$ ซึ่ง $f(\frac{1}{8})=\frac{-1}{16}$

เนื่องจาก $f''(x)>0$ ดังนั้นจึงได้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ขณะเดียวกันหากวาดกราฟดูก็จะได้ค่า Absolute minimum ด้วย

ตัวอย่าง 5.3.2

$$y=g(x)=x^3-3x^2+2$$

$$g'(x)=3x^2-6x \quad \text{และ} \quad g''(x)=6x-6$$

$g'(x)=0 \qquad x_1^*=2, x_2^*=0$ ให้ค่า stationary value สองค่า คือ

$g(2)=-2, g''(2)=6(2)-6>0$ ค่าต่ำสุด

$g(0)=2, g''(0)=6(0)-6<0$ ค่าสูงสุด

5.4 การประยุกต์ใช้กับทฤษฎีเศรษฐศาสตร์

5.4.1 เงื่อนไขของกำไรสูงสุด

ทราบว่า $\pi=\pi(Q)=R(Q)-C(Q)$

เพื่อหากำไรสูงสุด $\dfrac{d\pi(Q)}{dQ}=0$

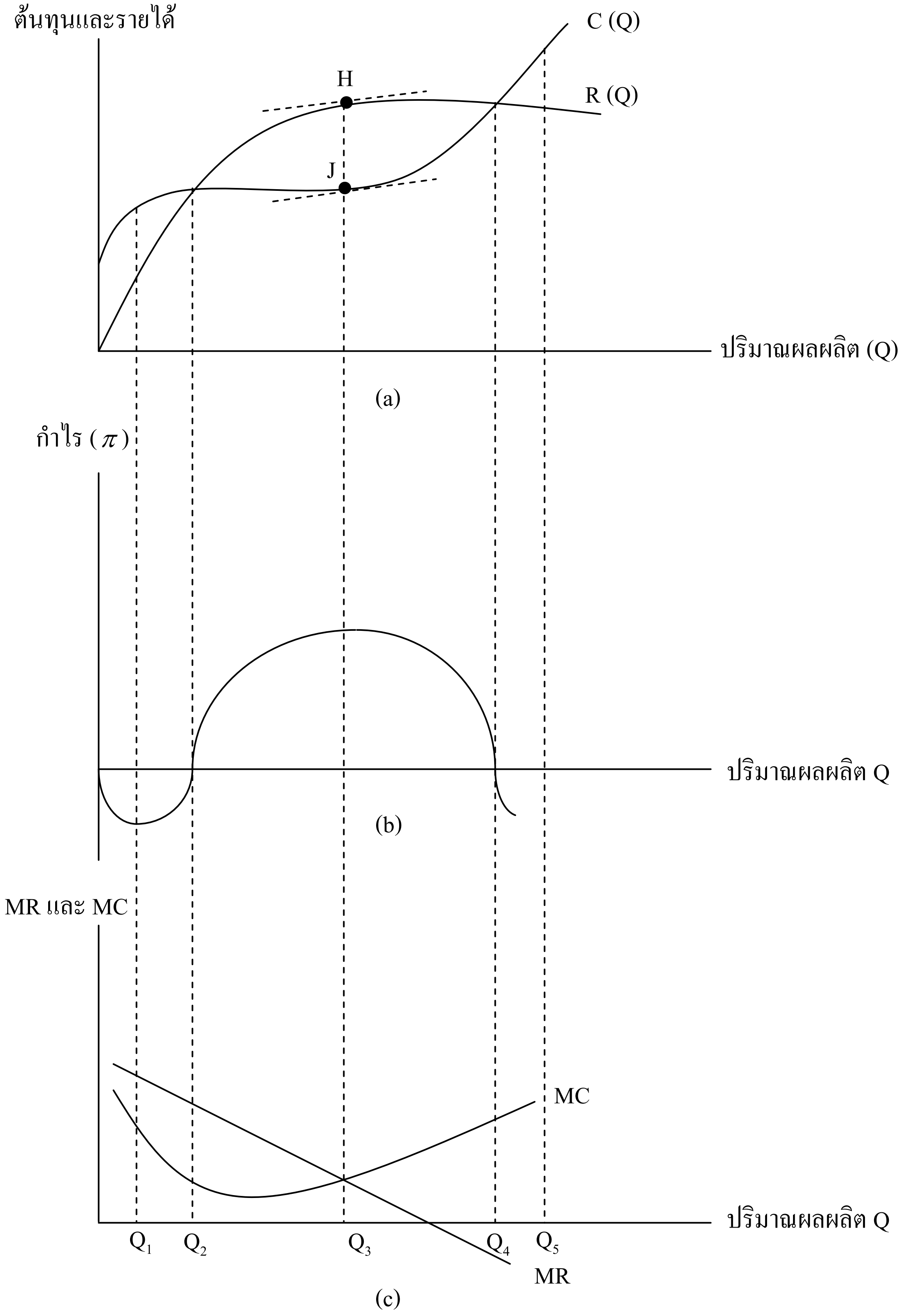
$$\frac{d\pi}{dQ}=\pi'(Q)=R'(Q)-C'(Q)=0$$

$$MR-MC=0 \quad \text{หรือ} \quad MR=MC$$

และ $\dfrac{d^2\pi}{dQ^2}\equiv\pi''(Q)=R''(Q)-C''(Q)\le 0$ หรือ $R''(Q)\le C''(Q)$

นั่นคือ ต้องเป็นช่วงที่ MC กำลังเพิ่ม และมากกว่า MR กำลังเพิ่ม หรือความชันของ MC > ความชันของ MR ดังแสดงในภาพ 5.4.1

พิจารณากราฟต่อไปนี้



ภาพ 5.4.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง MR กับ MC

ตัวอย่าง 5.4.1

$$R(Q) = 1200Q - 2Q^2$$
$$C(Q) = Q^3 - 61.25Q^2 + 1528.5Q + 2000$$
$$\therefore \pi(Q) = -Q^3 + 59.25Q^2 - 328.5Q - 2000$$
$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 118.5 \begin{cases} < 0 & \text{เมื่อ } Q = 36.5 \\ > 0 & Q = 3 \end{cases}$$

กำไรสูงสุด Q = 36.5

$\pi^* = 16{,}318.44$ หรือจะใช้วิธีหาจาก MR = MC ก็ได้

$$R'(Q) = 1200 - 4Q$$
$$C'(Q) = 3Q^2 - 122.5Q + 1528.5$$

5.4.2 ผลของภาษีต่อกำไรสูงสุด

(1) ภาษีเหมาจ่าย (Lump–sum tax)

$$R = R(Q)$$
$$C = C(Q)$$
$$T = t_0$$
$$\pi = R(Q) - C(Q) - t_0$$
$$\frac{d\pi}{dQ} = R'(Q) - C'(Q) = 0$$

ดังนั้น Q* จึงเป็นระดับเดียวกับกรณีไม่มีภาษีเหมาจ่าย

(2) ภาษีกำไร (Profit tax)

$$R = R(Q)$$
$$C = C(Q)$$
$$T = t \cdot \pi$$

โดยที่ t = อัตราร้อยละภาษีที่เก็บจากกำไร $(0 < t < 1)$

$$\pi = R(Q) - C(Q) - t \cdot (R(Q) - C(Q))$$
$$= (1-t)\left[R(Q) - C(Q)\right]$$
$$\pi' = (1-t)\left[R'(Q) - C'(Q)\right] = 0$$

ทราบว่า $(1 - t) > 0$ $\therefore R'(Q) - C'(Q) = 0$ จะเห็นว่าการเก็บภาษีกำไรไม่ส่งผลต่อ Q

(3) ภาษีสรรพสามิต (Specific tax) หรือภาษีต่อหน่วย

$$
\begin{aligned}
&R = R(Q)\\
&C = C(Q)\\
&T = t \cdot Q; t > 0\\
&\pi = R(Q) - C(Q) - t \cdot Q\\
&\pi = R'(Q) - C'(Q) - t = 0\\
&MR - MC - t = 0\\
&\therefore MR = MC + t
\end{aligned}
$$

ผลการเก็บภาษีต่อหน่วย คือ ทำให้ Q น้อยลงและกำไรลดลง เมื่อเทียบกับการไม่เก็บภาษีสรรพสามิต และระดับราคาก็สูงขึ้น

(4) รัฐจะควรเก็บภาษีเท่าไรจึงจะมีรายรับจากภาษีสูงสุด (ภาษีสรรพสามิต)

หลักการก็คือ จะต้องมีฟังก์ชันของภาษี แล้วจึงหา $\dfrac{dT}{dt} = 0$

กำหนดให้

$$
\begin{aligned}
&R = b_1 Q + c_1 Q^2\\
&C = a_2 + b_2 Q + c_2 Q^2\\
&\pi = b_1 Q + c_1 Q^2 - \left[a_2 + (b_2 + t)Q + c_2 Q^2 \right]\\
&\frac{d\pi}{dQ} = 0 = b_1 + 2c_1 Q - (b_2 + t) + 2c_2 Q\\
&\qquad = b_1 - (b_2 + t) + 2(c_1 - c_2)Q
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $$Q = \frac{-b_1 + (b_2 + t)}{2(c_1 - c_2)}$$

$$
\begin{aligned}
T &= t \cdot Q\\
&= t \cdot \left[\frac{-b_1 + (b_2 + t)}{2(c_1 - c_2)} \right]\\
&= \frac{-b_1 t + b_2 t + t^2}{2(c_1 - c_2)}\\
&= \frac{-t(b_1 - b_2) + t^2}{2(c_1 - c_2)}
\end{aligned}
$$

$$\frac{dT}{dt}=0 \quad \therefore t=\frac{b_1-b_2}{2}$$

และ $$\frac{d^2T}{dt}<0 \quad \text{หรือ} \quad \frac{2}{2(c_1-c_2)}<0$$

(5) รายรับภาษีสูงสุดในตลาดแข่งขัน (ภาษีสรรพสามิต)

$$Q_d=Q_s$$
$$Q_d=a_1+b_1P$$
$$Q_s=a_2+b_2(P-t)$$

โดยที่ $b_1<0, b_2>0, t\geq 0$ และทราบว่า

$$P_c=\frac{a_1-a_2}{b_2-b_1}+\frac{b_2t}{b_2-b_1}$$

$$Q_c=\frac{a_1b_2-b_1a_2}{b_2-b_1}+\frac{b_1b_2t}{b_2-b_1}$$

$$T=t\left[Q_c\right]$$

$$\frac{dT}{dt}=0 \therefore t=\frac{-a_1b_2+b_1a_2}{2b_1b_2}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2}=\frac{2b_1b_2}{b_2-b_1}<0$$

ตัวอย่าง 5.4.2

$$Q_d=500-9P$$
$$Q_s=-100+6P$$
$$a_1=500, a_2=-100, b_1=-9, b_2=6, t=19.44$$
$$\frac{d^2T}{dt^2}=\frac{2b_1b_2}{(b_2-b_1)}=\frac{-36}{5}<0$$

5.4.3 ทฤษฎีการผลิต

ทราบมาแล้วว่า Q = g (L) (ปัจจัยอื่นๆ กำหนดให้คงที่) ตามที่ได้ศึกษาทฤษฎีการผลิต

$$AP=\frac{Q}{L}=\frac{g(L)}{L}, MP=\frac{dQ}{dL}=g'(L)$$

Q กับ L จะเป็นรูปแบบฟังก์ชันใดยังไม่ได้กำหนด แต่ความสัมพันธ์นั้นๆ ต้องเป็นไปตามกฎผลได้หน่วยสุดท้ายลดน้อยถอยลง (Law of diminishing marginal return) ระดับ L เท่ากับเท่าใดที่ทำให้ AP สูงสุด

$$\frac{dAP}{dL}=0$$

$$=\frac{d(\frac{Q}{L})}{dL}=\frac{(L\cdot\frac{dQ}{dL}-Q\frac{dL}{dL})}{L^2}$$

$$=\frac{L\cdot g'(L)-g(L)}{L^2}$$

$$=\frac{g'(L)}{L}-\frac{g(L)}{L^2}=0$$

$$\frac{g'(L)}{L}=\frac{g(L)}{L^2}$$

$$g'(L)=\frac{g(L)}{L}$$

นั่นคือ $MP_L=AP_L$ ดังนั้น AP สูงสุด เมื่อ $MP_L=AP_L$

ตรวจสอบว่าเป็นค่าสูงสุดหรือไม่

$$\frac{d^2(AP)}{dL^2}=\frac{d}{dL}\left[\frac{g'(L)}{L}\right]-\frac{d}{dL}\left[\frac{g(L)}{L^2}\right]$$

$$=\frac{\left[L\frac{dg'(L)}{dL}-g'(L)\frac{dL}{dL}\right]}{L^2}-\frac{\left[L^2\frac{dg(L)}{dL}-g(L)\frac{dL^2}{dL}\right]}{L^4}$$

$$=\frac{1}{L}\cdot g''(L)-\frac{g'(L)}{L^2}-\frac{L^2g'(L)}{L^4}+\frac{2L\cdot g(L)}{L^4}$$

$$=\frac{1}{L}\cdot g''(L)-\frac{g'(L)}{L^2}-\frac{g'(L)}{L^2}+\frac{2L\cdot g(L)}{L^4}$$

$$=\frac{g''(L)}{L}-\frac{2g'(L)}{L^2}+\frac{2g(L)}{L^3}$$

แต่ทราบว่า $g'(L)=\frac{g(L)}{L}$ ดังนั้น $g(L)=g'(L)\cdot L$

ดังนั้น $$\frac{d^2(AP)}{dL^2}=\frac{g''(L)}{L}-\frac{2g'(L)}{L^2}+\frac{2\cdot g'(L)\cdot L}{L^3}$$

$$=\frac{g''(L)}{L}<0$$ จึงจะมีค่าสูงสุด

$$= \frac{1}{L} \cdot \frac{dMP_L}{dL} < 0 \quad \text{หรือ} \quad \frac{dMP}{dL} < 0$$ นั่นคือเป็นช่วงที่ MP กำลังลดลง

ตัวอย่าง 5.4.3 ฟังก์ชันที่ใช้กันมาก คือ ฟังก์ชันพหุนามองศาที่สาม

$$Q = g(L) = a + bL + cL^2 + eL^3$$
$$AP = \frac{g(L)}{L} = \frac{a}{L} + b + cL + eL^2$$
และ $$MP = g'(L) = b + 2cL + 3eL^2$$

ฟังก์ชันการผลิตที่สอดคล้องกับแนวคิดทางเศรษฐศาสตร์ เมื่อ L = 0, Q = 0 ดังนั้น a ต้องเท่ากับ 0 ฟังก์ชัน MP ก็ควรจะเริ่มจากจุดกำเนิด นั่นคือ b = 0 ทำให้ MP มีลักษณะเป็นสมการกำลังสอง และมีจุดวกกลับ

$$\frac{dMP}{dL} = g''(L) = 2c + 6eL = 0 \quad \text{หรือ} \quad L = \frac{-2c}{6e} = \frac{-c}{3e}$$

จุดวกกลับนี้เป็นค่าสูงสุด หรือต่ำสุด

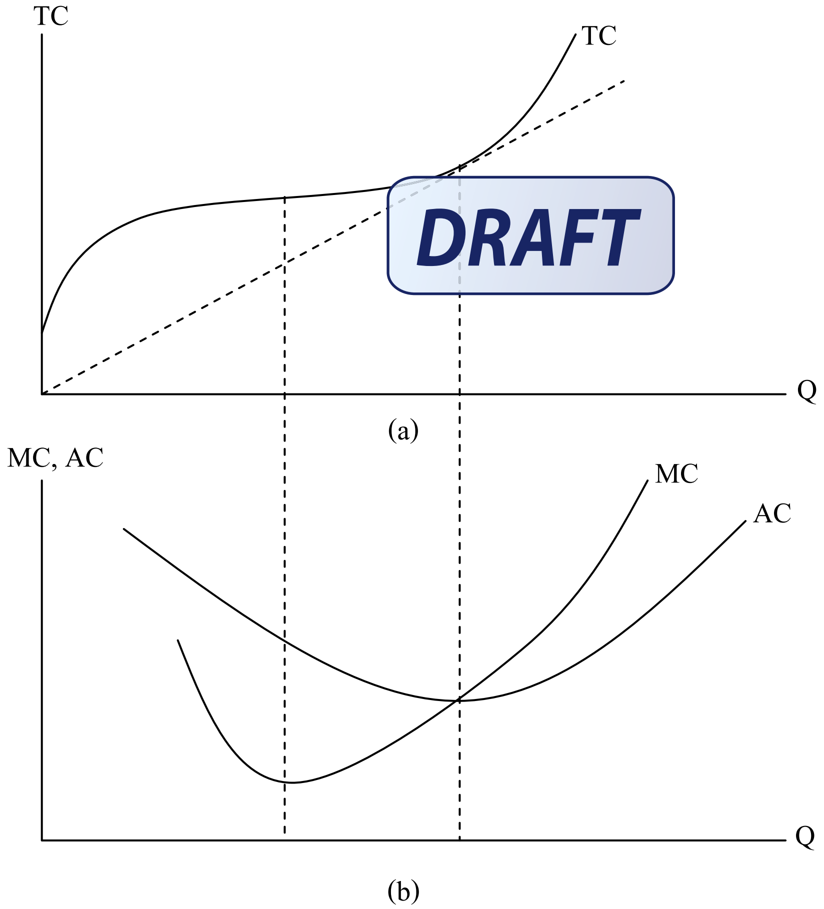
$$\frac{d^2MP}{dL^2} = 6e$$ ตามทฤษฎีให้เป็นค่าสูงสุด ดังนั้น e < 0 เช่นเดียวกัน L ต้องมากกว่า 0 ดังนั้น $L = \frac{-c}{3e}$ c ต้องมากกว่า 0 สรุปได้ว่า เงื่อนไขที่จำเป็นตามทฤษฎี คือ a = 0, b = 0, c > 0, e < 0 ดังนั้น

$$Q = g(L) = cL^2 + eL^3$$
$$AP = cL + eL^2$$
$$MP = 2cL + 3eL^2$$ โดยที่ c > 0, e < 0

5.4.4 ทฤษฎีต้นทุน

ทฤษฎีต้นทุนทางเศรษฐศาสตร์ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขความสัมพันธ์อย่างไรในทางคณิตศาสตร์ กำหนดฟังก์ชันต้นทุนดังสมการด้านล่าง และแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันต้นทุนดังภาพ 5.4.2

$$TC = C(Q), MC = C'(Q) \text{ และ } \quad ATC = \frac{C(Q)}{Q}$$



ภาพ 5.4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันต้นทุนส่วนเพิ่มและต้นทุนต่อหน่วย

ภาพ 5.4.2 ทำให้ได้ข้อสรุปว่า

(1) TC เป็นฟังก์ชันเพิ่มขึ้นอย่างเดียว (Monotonic increasing function) แสดงว่า ความชันของ TC เป็นบวกเสมอ หรือ MC > 0

(2) TC เป็นกราฟพหุนามองศาสาม ดังนั้น MC , ATC จึงเป็นรูปตัวยู

(3) ต้นทุนกับการผลิตมีความสัมพันธ์กัน $MC = \frac{dTC}{dQ} = \frac{dTC}{dL} \cdot \frac{dL}{dQ}$

แต่ $\frac{dTC}{dQ} = \frac{dTVC}{dL} = w$ และ $\frac{dL}{dQ} = \frac{1}{\frac{dQ}{dL}} = \frac{1}{MP} \therefore MC = \frac{w}{MP}$

เช่นเดียวกัน $AVC = \frac{w}{MP}$

พิจารณาฟังก์ชันต้นทุนพหุนามองศาสาม ดูว่าเงื่อนไขต้องเป็นอย่างไรจึงจะสอดคล้องกับทฤษฎีต้นทุน

$$TC = a + bQ + cQ^2 + eQ^3$$
$$FC = a$$
$$VC = bQ + cQ^2 + eQ^3$$
$$MC = \frac{dTC}{dQ} = b + 2cQ + 3eQ^2$$

VC, MC เป็น Quadratic function (รูปตัวยู) ดังนั้น e > 0 และจุดต่ำสุดของ MC จะต้องมากกว่า 0

$$\frac{dMC}{dQ} = 2c + 6eQ = 0$$
$$Q = \frac{-2c}{6e} = \frac{-c}{3e}$$
$$\frac{d^2MC}{dQ^2} = 6e > 0$$

และ $c < 0$ จึงจะทำให้ $Q > 0$ โดยสรุป $a \geq 0, b > 0, c < 0, e > 0$

5.4.4.1 ความสัมพันธ์ของ TC, AC และ MC

$$TC = C(Q)$$
$$ATC = \frac{C(Q)}{Q}$$
$$MC = \frac{dTC}{dQ} = C'(Q)$$

ต้องการหาจุดต่ำสุดของ ATC

$$\frac{dATC}{dQ} = \frac{Q\frac{dC}{dQ} - C\frac{dQ}{dQ}}{Q^2} = \frac{Q\cdot C'(Q) - C(Q)}{Q^2} = 0$$
$$Q\cdot C'(Q) = C(Q)$$
$$C'(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$$
$$MC = ATC$$

แสดงว่าจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดนั้น MC = ATC

เพื่อทดสอบว่าจุดต่ำสุดหรือสูงสุด หรือไม่ สามารถใช้หลักการอนุพันธ์ลำดับที่สอง ดังนี้

$$\frac{d^2ATC}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}\cdot\left[\frac{C'(Q)}{Q} - \frac{C(Q)}{Q^2}\right]$$

$$= \frac{\left[Q\dfrac{dC'(Q)}{dQ} - C'(Q)\dfrac{dQ}{dQ}\right]}{Q^2} - \frac{\left[Q^2\dfrac{dC(Q)}{dQ} - C(Q)\dfrac{d^2Q}{dQ}\right]}{Q^4}$$

$$= \frac{C''(Q)}{Q} - \frac{C'(Q)}{Q^2} - \frac{C'(Q)}{Q^2} + \frac{2C(Q)}{Q^3}$$

$$= \frac{C''(Q)}{Q} - \frac{2C'(Q)}{Q^2} + \frac{2C(Q)}{Q^3}$$

แต่ $Q\cdot C'(Q) = C(Q)$

$$\therefore \frac{d^2ATC}{dQ^2} = \frac{C''(Q)}{Q}$$

ทราบว่า $Q > 0$ และ $C'(Q)$ ความชันของ MC ก็มากกว่า 0

ดังนั้น $\dfrac{C''(Q)}{Q} > 0$

ดังนั้น ATC ต่ำสุด เส้น MC จะตัดกับ ATC ต่ำสุด

แบบฝึกหัด 5.4

1. กำหนด $\pi = -0.002Q^2 + 10Q - 4000$ จงหา Q ที่ทำให้ได้กำไรสูงสุด และคำนวณหากำไร
2. P = 557 - 0.2Q ผู้ผูกขาดมีต้นทุน $C = 0.05Q^3 - 0.2Q^2 + 17Q + 7000$ จงหา Q ที่ทำให้ได้กำไรสูงสุดและกำไรสูงสุดเท่ากับเท่าไร
3. ราคาข้าวในตลาด = 4.20 บาท สมการต้นทุนของชาวนาคือ $C = 0.002Q^2 - 1.2Q + 2450$
   (ก) จงหาฟังก์ชัน MC และ MR
   (ข) จงหา Q ที่ทำให้ได้กำไรสูงสุด
   (ค) ราคาข้าว = ? ที่ชาวนาจะไม่ผลิตเลย
4. $TR = -3Q^2 + 216Q$ และ $TC = 0.8Q^3 - 3Q^2 + 120Q + 200$
   (ก) ผู้ขายเผชิญกับตลาดระเภทใด และอุปสงค์ตลาดเป็นเท่าใด
   (ข) Q เท่ากับเท่าใดที่กฎผลได้ลดน้อยถอยลงเริ่มทำงาน
   (ค) จงหา Q ที่ทำให้ได้กำไรสูงสุด และกำไรสูงสุดเท่ากับเท่าใด

5. $TP = 90L^2 - L^3$

(ก) จงหาสมการ AP, MP

(ข) จงหา L ที่เป็นไปตามกฎผลได้ลดน้อยถอยลงเริ่มทำงาน

(ค) จงแสดงให้เห็นว่า AP = MP ณ L ที่ AP สูงสุด

6. กำหนด $TC = Q^3 - 36Q + 750$

(ก) จงหา Q ที่ทำให้ฟังก์ชัน TC เปลี่ยนเว้า

(ข) จงแสดงให้เห็นว่า MC = AVC ณ AVC ต่ำสุด

7. กำหนด $TC = 2000 + 10Q - 3Q^2 + 0.5Q^3$

(ก) จงยืนยันว่าค่าสัมประสิทธิ์ของสมการสอดคล้องกับทฤษฎีต้นทุนในทางเศรษฐศาสตร์

(ข) หงฟังก์ชัน AVC, MC, AFC

(ค) หาจุดต่ำสุดของ AVC, MC พร้อมยืนยันว่าเป็นจุดต่ำสุดจริง

(ง) ยืนยันว่า ณ AVC ต่ำสุด MC จะมีความชันเป็นบวก (+) และ MC = AVC

8. $Q = 12L^2 - 0.75L^3$ เป็นฟังก์ชันการผลิต

(ก) ค่าสัมประสิทธิ์สอดคล้องกับแนวคิดเศรษฐศาสตร์หรือไม่

(ข) จงหาฟังก์ชัน AP และ MP และระบุการใช้ปัจจัยการผลิตที่ทำให้ AP สูงสุด และพิสูจน์ว่า MP = AP และ MP กำลังลดลง