# การวิเคราะห์ความถดถอย : กรณีที่ไม่เป็นเส้นตรง

ในความเป็นจริงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ กับตัวแปรตาม ในทางเศรษฐศาสตร์ไม่ได้มีความสัมพันธ์เป็นแบบเชิงเส้นเท่านั้น แต่ยังมีแบบจำลองอื่นๆ ที่ไม่ได้เป็นเส้นตรง เช่น

- Constant Elastic Model (แบบจำลองที่มีค่าความยืดหยุ่นคงที่)
- Growth Model (แบบจำลองอธิบายการเจริญเติบโต)
- Reciprocal Model (แบบจำลองในลักษณะส่วนกลับ)

ซึ่งสามารถใช้วิธีกำลังสองน้อยจุด (OLS) มาสร้างสมการถดถอยเช่นเดียวกับในกรณีเชิงเส้น

## 7.1 Log-Linear Model

เริ่มจาก Constant Elastic Model คือ

$y = \beta_0 x^{\beta_1} e^{\varepsilon}$ __________ สมการ 1

เมื่อ e คือ ฐานของ natural lograithm

$\varepsilon$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

take natural log ทั้งสองข้างในสมการ 1

$\ln y = \ln\beta 0 + \beta 1 \ln x + \varepsilon$ __________ สมการ 2

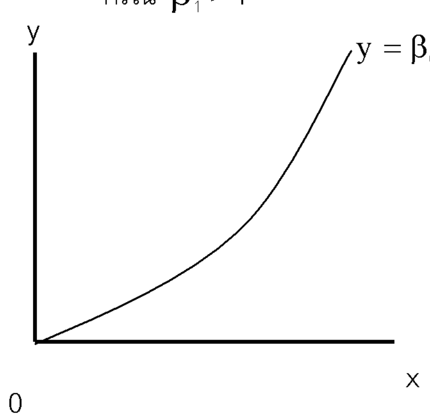
เรียกสมการที่ 2 ว่า Log-Linear Model

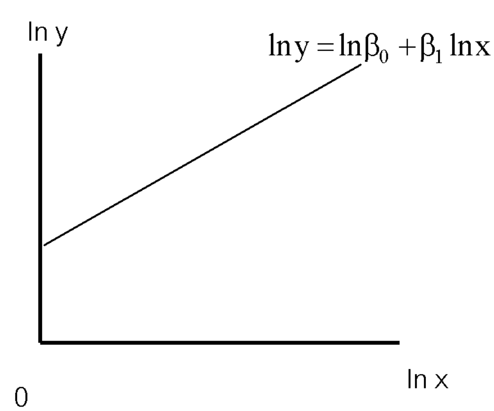
และสมการของแบบจำลอง คือ $y = \beta_0 x^{\beta_1}$ __________ สมการ 3

หรือเขียนในรูปของ natural log จะได้ว่า

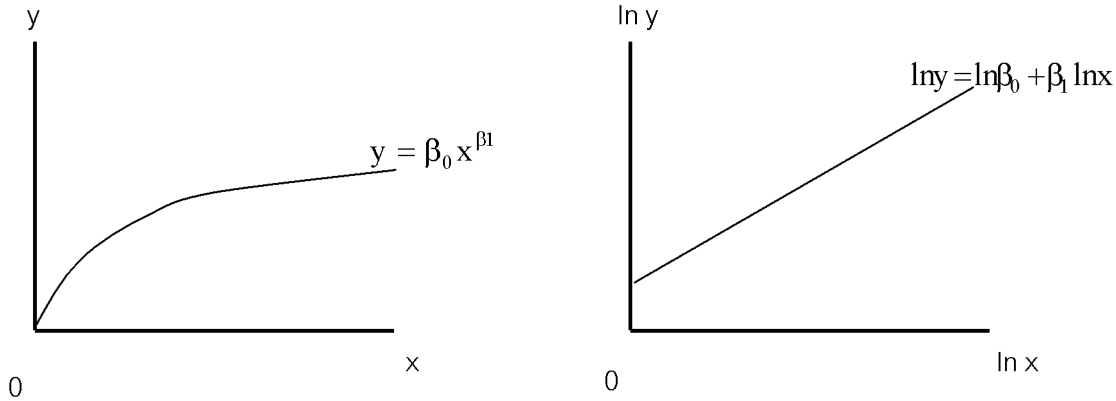
$\ln y = \ln \beta 0 + \beta 1 \ln x$ __________ สมการ 4

กรณี $\beta_1 > 1$

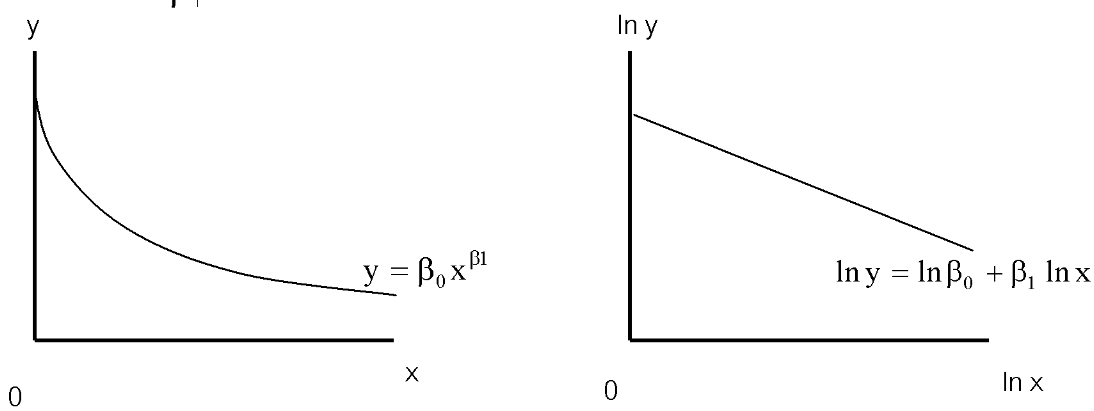


กรณี $0 < \beta_1 < 1$




กรณี $\beta_1 < 0$




จากสมการ 4 ถ้านำมาหาค่าความชัน (dy/dx) จะได้ว่า

$d(\ln y) = d(\ln \beta_0) + \beta_1 d(\ln x)$

$= dy/y = 0 + \beta_1 dx/x$

ดังนั้น $dy/dx = \beta_1 y/x$ __________ สมการ 5

จากสมการ 5 ถ้านำมาหาค่าความยืดหยุ่น $\frac{(dy/y)}{(dx/x)}$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \beta_1$$ __________ สมการ 6

ดังนั้น $\beta_1$ คือ ค่าความยืดหยุ่น (Elasticity)

ตัวอย่างที่ 1

ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างการลงทุน (I) กับ อัตราดอกเบี้ย (r) ของประเทศหนึ่ง มีดังนี้

| I (พันล้าน) | 9.0 | 5.5 | 8.5 | 4.0 | 3.5 | 2.5 | 3.0 | 1.5 | 1.2 | 1.8 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| r (%) | 2 | 3 | 2 | 4 | 5 | 6 | 4 | 6 | 8 | 7 | 9 |

จงประมาณการฟังก์ชั่นการลงทุน

**วิธีทำ** กำหนดให้สมการถดถอยของการลงทุน คือ

$\ln \hat{I} = \ln a + b \ln r$

และให้ $y = \ln I$

$x = \ln r$

| $y = \ln I$ | $x = \ln r$ | $(x-\bar{x})$ | $(x-\bar{x})^2$ | $(y-\bar{y})$ | $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2.197 | 0.693 | -0.823 | 0.677 | 1.081 | -0.8893 |
| 1.705 | 1.099 | -0.417 | 0.174 | 0.586 | -0.2455 |
| 2.140 | 0.693 | -0.823 | 0.677 | 1.024 | -0.8423 |
| 1.386 | 1.386 | -0.129 | 0.017 | 0.270 | -0.0350 |
| 1.253 | 1.609 | 0.094 | 0.009 | 0.137 | 0.0128 |
| 0.916 | 1.792 | 0.276 | 0.076 | -0.200 | -0.0552 |
| 1.099 | 1.386 | -0.129 | 0.017 | -0.017 | 0.0023 |
| 0.405 | 1.792 | 0.276 | 0.06 | -0.711 | -0.1962 |
| 0.182 | 2.079 | 0.564 | 0.318 | -0.934 | -0.5264 |
| 0.588 | 1.946 | 0.430 | 0.185 | -0.528 | -0.2273 |
| 0.405 | 2.197 | 0.682 | 0.464 | -0.711 | -0.4843 |
| 12.277 | 16.673 | 0.000 | 2.689 | 0.000 | -34863 |

$\bar{y} = 12.277/11 = 1.1161$

$\bar{x} = 16.673/11 = 1.5157$

$$b = \frac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum (x-\bar{x})^2} = \frac{-3.4863}{2.689} = -1.2965$$

$$\ln a = \bar{y} - b\bar{x} = 1.1161 - (-1.2965)(1.5157)$$

$$= 3.0812$$

ดังนั้น สมการถดถอยที่ได้ คือ $\ln \hat{I} = 3.0812 - 1.2965 \ln r$

หรือ $\hat{I} = 21.784 r^{-1.2965}$ (21.784 มาจาก $e^{3.0812}$)

ตัวอย่างที่ 2

ความสัมพันธ์ระหว่างราคาสินค้า x ($P_x$) กับปริมาณอุปสงค์สินค้า x ($Q_x$) ที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างผู้บริโภค จำนวน 11 คน ดังนี้

| $P_x$ (บาท) | 2.16 | 2.10 | 2.05 | 2.07 | 2.14 | 2.12 | 2.94 | 6.11 | 4.01 | 3.32 | 3.22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q_x$ (หน่วย) | 13.06 | 12.18 | 10.48 | 9.97 | 9.49 | 9.02 | 8.25 | 6.96 | 7.17 | 7.84 | 7.54 |

ก. จงประมาณการสมการอุปสงค์ของสินค้า x $\hat{Q}_x = a P_x^{b}$

วิธีทำ $\ln \hat{Q}_x = \ln a + b \ln P_x$

กำหนดให้ $x = \ln P_x$ และ $y = \ln Q_x$

| $P_x$ | $Q_x$ | $x = \ln P_x$ | $y = \ln Q_x$ | $(x-\bar{x})$ | $(x-\bar{x})^2$ | $(y-\bar{y})$ | $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.16 | 13.06 | 0.7701 | 2.5696 | -0.2404 | 0.0578 | 0.3634 | -0.0874 |
| 2.10 | 12.18 | 0.7419 | 2.4998 | -0.2686 | 0.0722 | 0.2932 | -0.0798 |
| 2.05 | 10.48 | 0.7178 | 2.3495 | -0.2937 | 0.0857 | 0.1433 | -0.0409 |
| 2.07 | 9.97 | 0.7275 | 2.2996 | -0.2830 | 0.0801 | 0.0934 | -0.0264 |
| 2.14 | 9.49 | 0.7608 | 2.2502 | -0.2498 | 0.0624 | 0.0441 | -0.0110 |
| 2.12 | 9.02 | 0.7514 | 2.1994 | -0.2591 | 0.0672 | -0.0067 | 0.0017 |
| 2.94 | 8.25 | 1.0784 | 2.1102 | 0.0679 | 0.0046 | -0.0960 | -0.0065 |
| 6.11 | 6.96 | 1.8099 | 1.9402 | 0.7994 | 0.0690 | -0.2660 | -0.2126 |
| 4.01 | 7.17 | 1.3888 | 1.9699 | 0.3782 | 0.1431 | -0.2363 | -0.0894 |
| 3.32 | 7.84 | 1.2 | 2.0592 | 0.1894 | 0.0359 | -0.1469 | -0.0278 |
| 3.22 | 7.54 | 1.1694 | 2.0202 | 0.1588 | 0.0252 | -0.1857 | -0.0285 |
| 32.24 | 101.96 | 11.1161 | 24.2678 | 0 | 1.273 | 0 | -0.6098 |

$\bar{y}$ = 2.2062 $\quad$ $\bar{x}$ = 1.0106

b = -0.479 $\quad$ lna = 2.69

ดังนั้น สมการถดถอยที่ได้ คือ $\ln \hat{Q}_x = 2.69 - 0.549 \ln P_x$

หรือ $\hat{Q}_x = 14.7317 P_x^{-0.479}$

ข. ค่าความยืดหยุ่นอุปสงค์ต่อราคาสินค้า x (แบบจุด) มีค่าประมาณเท่าใด

$$\varepsilon_{P_x} = b = -0.479$$

ค. ถ้าราคาสินค้า x = 5 บาท แล้ว ปริมาณอุปสงค์สินค้า x มีค่าประมาณเท่าใด

$$\hat{Q}_x = 14.7317\,(5^{-0.479})$$

$$= 6.8147 \approx 6.815 \text{ Ë¹èÇÂ}$$

**Semilog Model**

ฟังก์ชั่นกึ่งล็อก (semilog) เป็นฟังก์ชั่นที่มีตัวแปรอิสระ หรือ ตัวแปรตามตัวแปรใดหนึ่งนั้นอยู่ในรูปของ log อย่างเช่น

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ สมการ 7}$$

โดยที่เรียกสมการที่ 7 ว่า log–lin model

$$y = \beta_0 + \beta_1 \ln x + \varepsilon \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ สมการ 8}$$

โดยที่เรียกสมการที่ 8 ว่า lin-log model

**Log-Lin Model**

เป็นแบบจำลองที่นำมาใช้เพื่ออธิบายการเจริญเติบโตของตัวแปรที่เราศึกษา (y) ที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรเวลา (t) โดยที่รูปแบบของสมการ คือ

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 t \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ สมการ 9}$$

เมื่อ t คือ ตัวแปรเวลา และ t = 0 , 1 , 2 , . . .

จากสมการ 9 หา Growth Rate ของ y $\frac{(dy/y)}{dt}$

$$d(\ln y) = d(\beta_0) + \beta_1\, dt$$

$$dy/y = 0 + \beta_1\, dt$$

$$\beta_1 = \frac{dy/y}{dt} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ สมการ 10}$$

จากสมการที่ 10 จึงสรุปได้ว่า $\beta_1$ คือ Growth Rate ของ y

ตัวอย่าง 3

ผลิตภัณฑ์มวลรวมประชาชาติ (GNP) ณ ราคาคงที่ปี 1982 ของประเทศสหรัฐอเมริกาในปี 1969-1983 มีดังนี้

| Year | 1969 | 1970 | 1971 | 1972 | 1973 | 1974 | 1975 | 1976 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| GNP (**พันล้านดอลลาร์**) | 1,087.6 | 1,085.6 | 1,122.4 | 1,185.9 | 1,254.3 | 1,246.3 | 1,231.6 | 1,298.2 |
| Year | 1977 | 1978 | 1979 | 1980 | 1981 | 1982 | 1983 | |
| GNP (**พันล้านดอลลาร์**) | 1,369.6 | 1,438.6 | 1,479.4 | 1,475.0 | 1,512.2 | 1,480.0 | 1,534.7 | |

^

ก. จงประมาณสมการถดถอย ln GNP = a + bt

วิธีทำ ให้ x = t และ y = ln GNP

| ปี | x | GNP | y = ln GNP | $(x-\bar{x})$ | $(x-\bar{x})^2$ | $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1969 | 0 | 1,087.6 | 6.9917 | -7 | 49 | 1.307112 |
| 1970 | 1 | 1,085.6 | 6.9899 | -6 | 36 | 1.131425 |
| 1971 | 2 | 1,122.4 | 7.0232 | -5 | 25 | 0.776172 |
| 1972 | 3 | 1,185.9 | 7.0783 | -4 | 16 | 0.400807 |
| 1973 | 4 | 1,254.3 | 7.1343 | -3 | 9 | 0.132378 |
| 1974 | 5 | 1,246.3 | 7.1279 | -2 | 4 | 0.101049 |
| 1975 | 6 | 1,231.6 | 7.1161 | -1 | 1 | 0.06239 |
| 1976 | 7 | 1,298.2 | 7.1687 | 0 | 0 | 0 |
| 1977 | 8 | 1,369.6 | 7.223 | 1 | 1 | 0.043815 |
| 1978 | 9 | 1,438.6 | 7.2714 | 2 | 4 | 0.185933 |
| 1979 | 10 | 1,479.4 | 7.2994 | 3 | 9 | 0.362799 |
| 1980 | 11 | 1,475.0 | 7.2964 | 4 | 16 | 0.471817 |
| 1981 | 12 | 1,512.2 | 7.3213 | 5 | 25 | 0.714309 |
| 1982 | 13 | 1,480.0 | 7.2998 | 6 | 67 | 0.72803 |
| 1983 | 14 | 1,534.7 | 7.3361 | 7 | 49 | 1.1032 |
| รวม | 105 | 19,801.4 | 107.6769 | 0 | 280 | 7.521455 |

$\bar{x}$ = 105 / 15 = 7 $\bar{y}$ = 7.1785

b = $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) / \Sigma(x-\bar{x})^2$ = 0.0269

a = $y - b\bar{x}$ = 6.9902

$\ln \widehat{GNP}$ = 6.9902+0.0269t

ข. จงพยากรณ์ GNP ของประเทศสหรัฐอเมริกาในปี 2003

$$t_{(2003)} = 2003 - 1969 = 34$$

$$\ln \widehat{GNP} = 6.9902 + 0.0269(34) = 7.9048$$

$$\therefore \widehat{GNP} = e^{(7.9048)} = 2710.3$$

ค. อัตราการเจริญเติบโตของ GNP คิดเป็นกี่ %

$$G_{GNP} = 2.69\% \because b_1 = 0.0269 \rightarrow 2.69\%$$

**Lin-Log Model**

รูปแบบฟังก์ชั่น คือ $y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$ _________ สมการ 11

$$dy = d(\beta_0) + \beta_1 d(\ln x)$$

$$dy = 0 + \beta_1 \frac{dx}{x}$$

ดังนั้น $$\beta_1 = \frac{dy}{(dx/x)} \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ สมการ 12}$$

โดยที่ $\beta_1$ ในสมการที่ 12 อธิบายว่า ถ้า x เปลี่ยนแปลงไป 1% แล้ว จะมีผลทำให้ y เปลี่ยนไปกี่หน่วย

ตัวอย่าง 4

ข้อมูลแสดงถึง GNP และ Money Supply ของสหรัฐอเมริกา ในช่วงปี 1973-1987 มีดังนี้

| Year | 1973 | 1974 | 1975 | 1976 | 1977 | 1978 | 1979 | 1980 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| GNP (พันล้านดอลลาร์) | 1,359.3 | 1,472.8 | 1,598.4 | 1,782.8 | 1,990.5 | 2,249.7 | 2,508.2 | 2,723.0 |
| ปริมาณเงิน (M) (พันล้านดอลลาร์) | 861.0 | 908.5 | 1,023.2 | 1,163.7 | 1,286.7 | 1,389.0 | 1,500.2 | 1,633.1 |
| Year | 1981 | 1982 | 1983 | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | |
| GNP (พันล้านดอลลาร์) | 3,052.6 | 3,166.0 | 3,450.7 | 3,772.2 | 4,014.9 | 4,240.3 | 4,526.7 | |
| ปริมาณเงิน (M) (พันล้านดอลลาร์) | 1,795.5 | 1,954.0 | 2,185.2 | 2,363.6 | 2,562.6 | 2,807.7 | 2,907.0 | |

ก. จงประมาณสมการถดถอย $\ln \widehat{GNP} = a + b \ln M$

วิธีทำ ให้ y = GNP x = ln M

| y = GNP | M | x = ln M | $(x-\bar{x})$ | $(x-\bar{x})^2$ | $(y-\bar{y})^2$ | $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,359.3 | 861.0 | 6.758095 | -0.63907 | 0.408412 | 2058000.6487 | 916.7949 |
| 1,472.8 | 908.5 | 6.811795 | -0.58537 | 0.342659 | 1745234.752 | 773.31815 |
| 1,598.4 | 1,023.2 | 6.93069 | -0.46648 | 0.2176 | 1429156.4907 | 557.6593 |
| 1,782.8 | 1,163.7 | 7.05936 | -0.33781 | 0.114113 | 1022269.2854 | 341.5468 |
| 1,990.5 | 1,286.7 | 9.159836 | -0.23733 | 0.056325 | 645408.7127 | 190.6645 |
| 2,249.7 | 1,389.0 | 7.236339 | -0.16083 | 0.025865 | 296124.6167 | 87.5176 |
| 2,508.2 | 1,500.2 | 7.313354 | -0.08381 | 0.007024 | 81609.2534 | 23.9429 |
| 2,723.0 | 1,633.1 | 7.398235 | 0.001069 | $1.14E^{-0.6}$ | 5023.0294 | -0.0758 |
| 3,052.6 | 1,795.5 | 7.493039 | 0.095873 | 0.009192 | 66939.488 | 24.8049 |
| 3,166.0 | 1,954.0 | 7.577634 | 0.180468 | 0.032569 | 138478.256 | 67.1569 |
| 3,450.7 | 2,185.2 | 7.689436 | 0.292297 | 0.085437 | 431421.27 | 191.9882 |
| 3772.2 | 2,363.6 | 7.767941 | 0.370775 | 0.137474 | 957123.0667 | 362.7392 |
| 4,014.9 | 2,562.6 | 7.848778 | 0.451612 | 0.203953 | 1490906.1207 | 551.4299 |
| 4,240.3 | 2,807.7 | 7.940121 | 0.542955 | 0.2948 | 2092150.102 | 785.3445 |
| 4,526.7 | 2,901.0 | 7.272811 | 0.575645 | 0.331367 | 3002688.2567 | 997.4927 |
| 41908.10 | 26335 | 110.9575 | 0 | 2.2668 | 15462533.3493 | 5872.3246 |

$\overline{y}$ = 2793.8733 $\overline{x}$ = 7.3972

b = $\Sigma (x-\overline{x})(y-\overline{y}) / \Sigma (x-\overline{x})^2$ = 2590.579

a = $\overline{y} - b\overline{x}$ = -16369.158

ดังนั้นสมการถดถอย คือ $\ln \hat{GNP}$ = -16.369.158+2590.579lnM

ข. จงวิเคราะห์ผลกระทบต่อการเปลี่ยนแปลง GNP ถ้าคาดว่าปริมาณเงินเพิ่มขึ้น 2% ต่อปี

$$\hat{GNP} = -16369.158 + 2590.579 \ln M$$

$$\Delta \hat{GNP} = (2590.579) \times (2)$$

$$= 5181.158$$

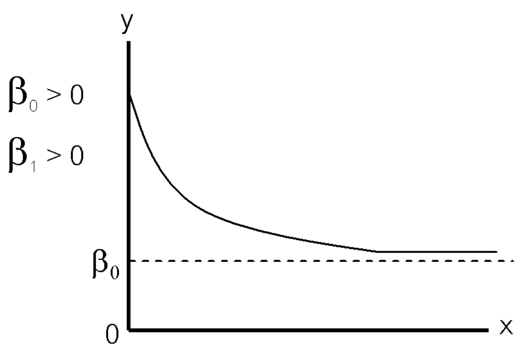
$\therefore$ GNP à¾ÔèèÁ¢ÖéÁÒ³ 5181.158 ¾Ñ¹ÅéÒ¹´ÍÅÅÒ

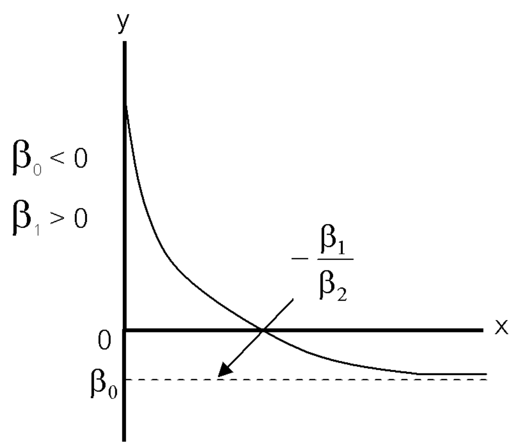
Note: $\beta_1 = \dfrac{dy}{(dx / x)}$

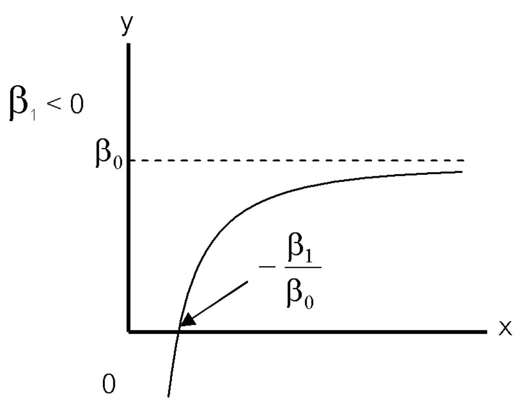
$dy = \beta_1 \left( \dfrac{dx}{x} \right) = \Delta \hat{GNP}$

Reciprocal Model

แบบจำลอง คือ y = $\beta_0 + \beta_1 \left[ \dfrac{1}{x} \right] + \varepsilon$ __________ สมการ 13



ตัวอย่างที่ 5

ข้อมูลต่อไปนี้แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงในอัตราค่าจ้าง (N) และอัตราการว่างงาน (U) ของประเทศอังกฤษในปี ค.ศ. 1950-1966

| ปี | W (%) | U (%) | ปี | W (%) | U (%) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1950 | 1.8 | 1.4 | 1959 | 2.6 | 1.9 |
| 1951 | 8.5 | 1.1 | 1960 | 2.6 | 1.5 |
| 1952 | 8.4 | 1.5 | 1961 | 4.2 | 1.4 |
| 1953 | 4.5 | 1.5 | 1962 | 3.6 | 1.8 |
| 1954 | 4.3 | 1.2 | 1963 | 3.7 | 2.1 |
| 1955 | 6.9 | 1.0 | 1964 | 4.8 | 1.5 |
| 1956 | 8.0 | 1.1 | 1965 | 4.3 | 1.3 |
| 1957 | 5.0 | 1.3 | 1966 | 4.6 | 1.4 |
| 1958 | 3.6 | 1.8 | | | |

จงประมาณการสมการถดถอย $W = a + b / u$

วิธีทำ ให้ $y = w$

$x = 1/u$

| $y = w$ | $u$ | $x = 1/u$ | $(x-\bar{x})$ | $(x-\bar{x})^2$ | $(y-\bar{y})^2$ | $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.8 | 1.4 | 0.7143 | 0.0017 | 0 | 8.9296 | -0.0052 |
| 8.5 | 1.1 | 0.9091 | 0.1966 | 0.0386 | 13.7772 | 0.7296 |
| 8.4 | 1.5 | 0.6667 | -0.0459 | 0.0021 | 13.0448 | -0.1657 |
| 4.5 | 1.5 | 0.6667 | -0.0459 | 0.0021 | 0.0831 | 0.0132 |
| 4.3 | 1.2 | 0.8333 | 0.1208 | 0.0146 | 0.2384 | -0.0590 |
| 6.9 | 1.0 | 1 | 0.2875 | 0.0826 | 4.4596 | 0.6071 |
| 8.0 | 1.1 | 0.9091 | 0.1966 | 0.0386 | 10.3154 | 0.6313 |
| 5.0 | 1.3 | 0.7692 | 0.0567 | 0.0032 | 0.0448 | 0.0120 |
| 3.6 | 1.8 | 0.5556 | -0.1570 | 0.0246 | 1.4119 | 0.1865 |
| 2.6 | 1.9 | 0.5263 | -0.1862 | 0.0347 | 4.7884 | 0.4075 |
| 2.6 | 1.5 | 0.6667 | -0.0459 | 0.0021 | 4.7884 | 0.1004 |
| 4.2 | 1.4 | 0.7143 | 0.0017 | 0 | 0.3460 | -0.0010 |
| 3.6 | 1.8 | 0.5556 | -0.1570 | 0.0246 | 1.4119 | 0.1865 |
| 3.7 | 2.1 | 0.4762 | -0.2363 | 0.0559 | 1.1843 | 0.2572 |
| 4.8 | 1.5 | 0.6667 | -0.0459 | 0.0021 | 0.0001 | -0.0005 |
| 4.3 | 1.3 | 0.7692 | 0.0567 | 0.0032 | 0.2384 | -0.0277 |
| 4.6 | 1.4 | 0.7143 | 0.0017 | 0 | 0.0354 | -0.0003 |
| 81.4 | 24.8 | 12.11312 | 0 | 0.3292 | 0 | 2.8718 |

$\overline{y} \quad = \quad 4.7882 \qquad x \quad = \quad 0.712588$

$b \quad = \quad \Sigma\,(x-\overline{x})\,(y-\overline{y})\,/\,\Sigma\,(x-\overline{x})^2$

$\quad = \quad 2.8718/0.3292 = 8.72357$

$a \quad = \quad \overline{y} - b\overline{x}$

$\quad = \quad 4.7882 - 8.72357(0.7125) \quad = \quad -1.42734$

$\hat{W} \quad = \quad a + b/u \quad = \quad -1.42734 + 8.72357(1/u)$