แล้ว $\phi_1 (tx_1, tx_2) = a\ A(tx_1)^{\alpha-1} (tx_2)^{1-\alpha}$

$= \alpha\ At^{\alpha-1}\ x_1^{\alpha-1}\ t^{1-a}\ x_2^{1-a}$

$= \alpha\ At^{\alpha-1+1-\alpha} x_1^{\alpha-1}\ x_2^{1-n}$

$= t^{\circ} (a\ A\ x_1^{\alpha-1}\ x_2^{1-\alpha})$

$= t^{\circ}\ \phi_1 (x_1, x_2)$ * : $\phi_1(x_1,x_2)$

$= a\ A\ x_1^{a-1}\ x_2^{1-a}$

และจาก

$\phi_2 = \phi_2(x_1,x_2)$

$= \frac{\partial\phi}{\partial x_2}$

$= (1-a)\ Ax_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}$: $\phi_2 = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} = MP_2$

แล้ว $\phi_2 (tx_1,tx_2) = (1-a)\ A\ (tx_1)^{\alpha}\ (tx_2)^{-\alpha}$

$(1-u)\ A\ t^{\alpha}x_1^{\alpha}\ t^{-\alpha}x_2^{-\alpha}$

$= (1-a)\ A\ t^{\alpha-\alpha}x_1^{\alpha}\ x_2^{-\alpha}$

$= t^{\circ} \{ (1-a)\ A\ x_{-1}^{\alpha}\ x_2^{-\alpha} \}$

$= t^{\circ}\ \phi_2 (x_1,x_2)$ *

: $\phi_2(x_1,x_2) = (I - “)A\ x_1^{\alpha}\ x_2^{-\alpha}$

แสดงว่า ผลิตผลส่วนเหลือมของปัจจัยการผลิต x_1 และ x_2 (MP_1 และ MP_2) จะมีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่ศูนย์ (o)

แสดง : ค) ผลิตผลส่วนเหลือมของปัจจัยการผลิต x_1 และ x_2 ซึ่งมีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่ศูนย์ จะขึ้นอยู่กับสัดส่วนการใช้ปัจจัยการผลิตเหล่านั้นเท่านั้น

แบบสมการการผลิต

$$\phi = Ax_1^{\alpha} x_2^{1-a}$$

ดังนั้น

$$\phi_1 = \alpha A x_1^{a-1} x_2^{1-a}$$

$$= \alpha A\, x_1^{\alpha-1} x_2^{-(\alpha-1)}$$

$$= \alpha A\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{a-1}$$

และ

$$\phi_2 = (1-\alpha)\, Ax_1^{\alpha} x_2^{-\alpha}$$

$$= (1-\alpha)\, A\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha} \quad *$$

โดยเหตุที่ A และ α เป็นค่าคงที่

ฉะนั้นจึงแสดงว่า ผลิตผลส่วนเหลือมซึ่งมีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่ศูนย์จะขึ้นอยู่กับสัดส่วนของการใช้ปัจจัยการผลิตในการผลิตนั้น ๆ เท่านั้น

นอกจากนี้ ยังจะแสดงให้เห็นจริงได้อีกว่า ผลิตผลเฉลี่ยของปัจจัยการผลิต (Average Prodductivity of Inputs : AP_i) ของเอกมัยภาพแบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส ซึ่งมีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่หนึ่ง จะขึ้นอยู่กับสัดส่วนของการใช้ปัจจัยการผลิตในการผลิตนั้น ๆ เท่านั้นเช่นกันด้วย

แสดง : ง) ผลิตผลเฉลี่ยของปัจจัยการผลิต x_1 และ x_2 จะขึ้นอยู่กับสัดส่วนของการใช้ปัจจัยการผลิตเท่านั้น

แบบสมการการผลิต :

$$\phi = A\, x_1^{a}\, x_2^{1-a}$$

ดังนั้น

$$AP_1 = \frac{\phi}{x_1}$$

$$= \frac{Ax_1^{\alpha}\, x_2^{1-a}}{x_1}$$

$$= A\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{1-\alpha}$$

$$= A\, x_1^{\alpha-1}\, x_2^{-(1-\alpha)}$$

$$= A\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{a-1} \quad *$$

และ

$$AP_2 = \frac{\phi}{x_2}$$

$$= Ax_1^{\alpha}\, x_2^{1-\alpha}$$

$$= Ax_1^{\alpha}\, x_2^{\alpha}$$

$$= A\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}$$

โดยเหตุที่ A และ α เป็นค่าคงที่

ฉะนั้นจึงแสดงว่า ผลิตผลเฉลี่ยของเอกมัยแบบสมการการผลิตของ ค๊อบ-ดักลาส ซึ่งมีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่หนึ่ง จะขึ้นอยู่กับสัดส่วนของการใช้ปัจจัยการผลิตเท่านั้น ///

คุณสมบัติที่ ๒ :

แบบสมการการผลิตของคอบ-ดักลาส สามารถเขียนให้อยู่ในรูป (Euler's Theorem ได้

พิสูจน์ :

ถ้าเอกมัยภาพแบบสมการการผลิตของ ค๊อบ-ดักลาส สามารถเขียนให้อยู่ในรูป Euler's Theorem ได้จริง ก็จะได้รูปลักษณะดังต่อไปนี้

$$x_1 \phi_1 + x_2\phi_2 = (a + \beta) \phi (x_1, x_2) \quad : (\alpha + \beta) = k$$

โดยวิธีการพิสูจน์เอกลักษณ์

จากแบบสมการการผลิต $\phi = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$

แล้ว $\phi_1 = \alpha Ax_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}$

และ $\phi_2 = \beta Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}$

จากด้านซ้ายมือของ Euler's Theorem

$$x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2 = x_1 (\alpha Ax_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}) + x_2(\beta Ax_1^{a} x_2^{\beta-1})$$

แทนค่า ϕ_1 และ ϕ_2

$$= \alpha Ax_1^{a} x_2^{\beta} + \beta Ax_1^{a} x_2^{\beta}$$

$$= (\alpha + \beta) Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$= (\alpha + \beta) \phi (x_1, x_2)$$

= ด้านขวามือของ Euler's Theorem

แสดงว่า เอกมัยแบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส สามารถเขียนให้อยู่ในรูป Euler's Theorem ได้จริง

ข.ต.พ. ///

เมื่อเอกมัยแบบสมการการผลิตของ ค๊อบ-ดักลาส สามารถเขียนให้อยู่ในรูป Euler's Theorem ได้ ก็ย่อมจะแสดง ผลรวมของความยืดหยุ่นของการผลิตอันเกิดจากปัจจัยการผลิต (Output Elasticity of Input) จะเท่ากับ ลำดับของความเป็น เอกมัยภาพของแบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาสนี้ (+) พอดี ซึ่งเป็นเช่นเดียวกันกับลักษณะของเอกมัยแบบสมการการผลิตทั่ว ๆ ไปนั่นเอง

แสดง :

Cobb-Douglas Production Function

$$\phi = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

Euler's Theorem

$$x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2 = (\alpha+\beta) \phi (x_1, x_2)$$

$$x_1 \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial\phi}{\partial x_2} = (\alpha+\beta) \phi (x_1, x_2)$$

หารตลอดด้วย ϕ

$$\frac{x_1}{\phi} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \frac{x_2}{\phi} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x_2} = (\alpha+\beta)$$

ซึ่ง $\frac{x_i}{\phi} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$ คือความยืดหยุ่นของการผลิตอันเกิดจาก X_i

แสดงว่า ผลรวมของความยืดหยุ่นของการผลิต อันเกิดจากปัจจัยการผลิต ของเอกมัยแบบสมการการผลิต ค๊อบ-ดักลาส จะเท่ากับ $(\alpha+\beta)$ พอดี ///

อนึ่ง ผลได้ของ Euler's Theorem ซึ่งได้พิจารณาในรูปของแบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส มีความหมายที่น่าจะได้พิจารณาโดยนัยของเศรษฐศาสตร์เกี่ยวกับการวิเคราะห์การกระจายของผลผลิตอยู่ด้วย ในที่นี้จึงจะได้ศึกษาต่อไปดังนี้ :

จาก แบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส

$$\phi = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

เขียนให้อยู่ในรูป Euler's theorem

$$x_1 \phi_1 + x_2\phi_2 = (\alpha+\beta) \phi (x_1,x_2)$$

หรือ $$(\alpha +\beta) \phi (x_1,x_2) = x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2$$

ถ้าพิจารณาการกระจายของผลิตผลที่ตกไปเป็นค่าปัจจัยการผลิต โดยหลักการของ Adding-up Theorem แล้ว จะวิเคราะห์ได้ว่า ค่าปัจจัยการผลิตหรือรายได้ของเจ้าของผู้ขาย-ปัจจัยการผลิตแต่ละชนิด จะเท่ากับ จำนวนปัจจัยการผลิตชนิดนั้น คูณกับ อัตราค่าปัจจัยการผลิตต่อหน่วยของปัจจัยการผลิตชนิดนั้น ๆ นั่นเอง

ซึ่งถ้าปัจจัยแต่ละชนิดมีมูลค่าที่แท้จริงเท่ากับผลิตผลส่วนเหลื่อมของตัวเองแล้ว รายได้ที่แท้จริงของเจ้าของปัจจัยการผลิตแต่ละชนิดก็คือ

รายได้ของเจ้าของปัจจัยการผลิตชนิดที่หนึ่ง (Y_{x_1})

$$Y_{x_1} = x_1 \phi_1$$

$$= x_1 (\alpha A x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}) \quad : \text{แทนค่า } \phi_1$$

$$= \alpha A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$= \alpha \phi \quad : \phi = A x_1^{a} x_2^{\beta}$$

รายได้ของเจ้าของปัจจัยการผลิตชนิดที่สอง (Y_{x_2})

$$Y_{x_2} = x_2 \phi_2$$

$$= x_2 (\beta A x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}) \quad : \text{ แทนค่า } \phi_2$$

$$= \beta A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$= \beta \phi \qquad : \phi = A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

เช่นนี้แล้ว รายได้ที่แท้จริงของปัจจัยการผลิตทั้งหมด (real income of input) ก็คือ

$$Y = Y_{x_1} + Y_{x_2}$$

แทนค่า Y_{x_1} และ Y_{x_2}

$$= \alpha\phi + \beta\phi$$

$$\therefore Y = (\alpha+\beta) \phi$$

จะเห็นได้ว่า รายได้ของปัจจัยการผลิตที่แท้จริง ซึ่งก็คือรายจ่ายของผู้ผลิตแก่เจ้าของปัจจัยการผลิตทั้งหมดจะเท่ากับ ลำดับความเป็นเอกมัยภาพ $(\alpha+\beta)$ คูณกับ ผลิตผล พอดี นอกจากนี้ยังสามารถวิเคราะห์พิจารณาการกระจายผลิตผลโดยละเอียดได้ดังนี้ คือ :

พิจารณา :

(๑) ถ้า $(\alpha + \beta) = 1$ หรือ แบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส มีความเป็นเอกมัยภาพลำดับที่หนึ่ง คือ มีผลได้ต่อขนาดคงที่แล้ว รายได้ที่แท้จริงของปัจจัยการผลิต จะเท่ากับผลผลิตพอดี

(๒) ถ้า $(\alpha + \beta) > 1$ หรือแบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาสมีความเป็นเอกมัยภาพเกินกว่าลำดับที่หนึ่ง คือ มีผลได้ต่อขนาดเพิ่มขึ้นแล้ว รายได้ที่แท้จริงของปัจจัยการผลิตก็จะมากกว่าผลิตผลในมูลค่าที่แท้จริง เมื่อเป็นดังนี้ ย่อมเป็นไปไม่ได้ว่า ปัจจัยการผลิตแต่ละชนิดจะได้ผลตอบแทนต่อหน่วยเท่ากับผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิตชนิดนั้น ๆ ที่เป็นเช่นนี้เพราะว่าผลผลิตที่แท้จริงมีไม่พอที่จะจ่ายแก่ปัจจัยการผลิตเหล่านั้น เช่นนี้แล้ว อาจจะสรุปได้ว่าผู้ผลิตซึ่งมีแบบสมการการผลิตซึ่งมีผลได้ต่อขนาดเพิ่มขึ้น แต่การผลิตก็ยังได้ดุลยภาพแล้วละก็ การผลิตนั้นจะต้องเป็นแบบผูกขาด (Monopoly) อย่างแน่นอน

(๓) ถ้า $(\alpha + \beta) < 1$ หรือ แบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาสนี้ มีเอกมัยภาพน้อยกว่าลำดับที่หนึ่ง คือมีผลได้ต่อขนาดลดลงแล้ว รายได้ที่แท้จริงของปัจจัยการผลิต ย่อมน้อยกว่ามูลค่าที่แท้จริงของผลผลิต เมื่อเป็นดังนี้ ย่อมหมายความว่า การผลิตจะเกิดส่วนเกิน (Surplus) ขึ้น เป็นจำนวน $\phi - (\alpha + \beta)\ \phi$ แต่ส่วนเกินนี้จะตกอยู่แก่ผู้ใดไม่ทราบ

อนึ่งจากการพิจารณาการกระจายของผลิตผลที่ว่ารายได้ที่แท้จริงของปัจจัยการผลิตทั้งหมดคือ

$$Y = Y_{x_1} + Y_{x_2}$$

หรือ

$$Y = (\alpha + \beta)\ \phi$$

ดังนั้น รายได้ที่แท้จริงสัมพัทธ์ของแต่ละปัจจัยการผลิต (relative of income going to x_1 and x_2) ก็คือ :

รายได้สัมพัทธ์ของ x_1 :

$$\frac{Y}{Y}x_1 = \frac{x_1 \phi_1}{(\alpha+\beta)\ \phi}$$

$$= \frac{a\ A\ x_1^{\alpha}\ x_2^{\beta}}{(\alpha+\beta)\ \phi}$$

$$= \frac{\alpha\ \phi}{(\alpha+\beta)\ \phi}$$

$$= \frac{a}{\alpha+\beta} \qquad \text{.....} \quad (1)$$

รายได้สัมพัทธ์ของ x_2 :

$$\frac{Y}{Y}x_2 = \frac{x_2 \phi_2}{(\alpha+\beta)\phi}$$

$$= \frac{\beta\ A\ x_1^{\alpha}\ x_2^{\beta}}{(\alpha+\beta)\ \phi}$$

$$= \frac{\beta\phi}{(\alpha+\beta)\ \phi}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha+\beta} \qquad \text{.....} \quad (2)$$

นอกจากนี้ยังหาความสัมพัทธ์ของรายได้ที่แท้จริงของปัจจัยการผลิตได้ว่า :

$$\frac{Y}{Y_2}x_1 = \frac{a}{\beta} \qquad \text{.....} \quad (3)$$

โดยสรุปแล้ว จาก (๑); (๒) และ (๓) อาจกล่าวได้ว่า อัตรารายได้ของแต่ละปัจจัยการผลิตในการผลิตสินค้าใด ๆ นั้น จะขึ้นอยู่กับ α และ β เท่านั้น หาได้มีความเกี่ยวข้องกับจำนวนปัจจัยการผลิตที่ถูกนำมาใช้แต่อย่างใด

อย่างไรก็ตาม ในการพิจารณาการกระจายของผลผลิตของแบบสมการการผลิตแบบ ค๊อบ - ดักลาสนี้ ทำให้สามารถแสดงค่าสัมพัทธ์ของผลิตผลอันเกิดจากปัจจัยการผลิตแต่ละชนิดได้ด้วย ดังต่อไปนี้:

ผลิตผลสัมพัทธ์ของ x_1 :

$$\frac{x_1 \ (MP_1)}{\phi} = \frac{x_1 \ \phi_1}{\phi}$$

$$= \frac{\alpha \ A \ x_1^{\alpha} \ x_2^{\beta}}{\phi}$$

$$= \frac{\alpha \ \phi}{\phi}$$

$$= \alpha$$

ผลิตผลสัมพัทธ์ของ x_2 :

$$\frac{x_2 \ (MP_2)}{\phi} = \frac{x_2 \ \phi_2}{\phi}$$

$$= \frac{\beta \ A \ x_1^{\alpha} \ x_2^{\beta}}{\phi}$$

$$= \frac{\beta \ \phi}{\phi}$$

$$= \beta$$

และอัตราผลิตผลของ x_1 ต่อ x_2 ก็คือ

$$\frac{x_1\ (MP_1)}{x_2\ (MP_2)} = \frac{a}{\beta}$$ นั่นเอง

ข้อสังเกต

ถ้าแบบสมการการผลิตของค๊อบ - ดักลาส เป็นแบบผลได้ต่อขนาดคงที่แล้วละก็ รายได้ที่แท้จริงสัมพัทธ์ของปัจจัยการผลิต จะเท่ากับ ผลิตผลสัมพัทธ์ของปัจจัยการผลิตนั้น ๆ พอดี นั่นคือ

เมื่อผลได้ต่อขนาดคงที่ : $\alpha + \beta = 1$

ดังนั้น :

รายได้ที่แท้จริงสัมพัทธ์ของ x_1

$$\frac{Y_{x_1}}{Y} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$= \alpha \qquad : \alpha + \beta = 1$$

$$= \frac{x_1\ (MP_1)}{\phi} \qquad : \text{ผลิตผลสัมพัทธ์ของ } x_1$$

และ

รายได้ที่แท้จริงสัมพัทธ์ของ x_2

$$\frac{Y_{x_2}}{Y} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

$$= \beta \qquad : \alpha + \beta = 1$$

$$= \frac{x_2\ (MP_2)}{\phi} \qquad : \text{ผลิตผลสัมพัทธ์ของ } x_2$$

คุณสมบัติที่ ๓

เส้นแสดงผลผลิตเท่ากัน (Iso-quant) ของแบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส จะเป็นเส้นโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง (convex to the origin or concave from above)

พิสูจน์ : เส้นแสดงผลผลิตเท่ากันของแบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส จะเป็นเส้นโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง

จากแบบสมการการผลิตของ ค๊อบ - ดักลาส

$$\phi = A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}$$

และจะได้เส้นแสดงผลผลิตเท่ากันเป็น

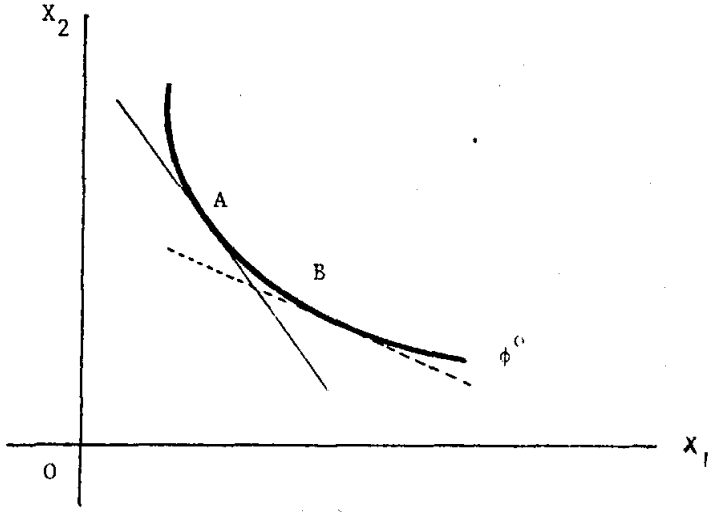
$$\phi^{\circ} = A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}$$

โดยที่ ϕ° หมายถึงผลผลิตระดับหนึ่ง

หรือ

$$x_2 = \left(\frac{\phi^{\circ}}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-\alpha/\beta}$$

โดยเรขาคณิต :



ถ้าหากว่าแบบสมการนี้ จะแสดงว่าเส้นแสดงผลผลิตเท่ากันจะโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลางจริง ดังภาพแล้วละก็ เส้นแสดงผลผลิตเท่ากันจะต้องมีคุณสมบัติดังแนวคิดหลักการต่อไปนี้[1/]

ก) ค่าความชัน (slope) ของเส้นผลผลิตเท่ากันจะต้องมีค่าน้อยกว่าศูนย์ (เป็นลบ) กล่าวคือ การเปลี่ยนแปลงของการใช้ปัจจัยทดแทนกันต้องผกผันกัน คือ

$$\frac{d\,x_2}{d\,x_1} < 0$$

ข) ค่าความชันจะเปลี่ยนแปลงไปในทิศทางเดียวกันกับการเปลี่ยนแปลงของการทดแทนปัจจัยการผลิต กล่าวคือ เมื่อเพิ่มการใช้ปัจจัย x_1 เข้าแทนที่ x_2 มากหน่วยขึ้น ค่าความชันของเส้นแสดงผลผลิตเท่ากัน ณ ตำแหน่งการทดแทนใหม่ (B) จะมากกว่าตำแหน่งเก่า (A) คือเพิ่มขึ้นด้วยนั่นเอง (ติดลบน้อยลง)

$$\frac{d\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)}{d\,x_1} > 0$$

$$\frac{d^2\,x_2}{d\,x_1^2} > 0$$

พิจารณาหลักการ ก)

จากเส้นแสดงผลผลิตเท่ากัน

$$x_2 = \left(\frac{\phi^o}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-\alpha/\beta}$$

1/ ดูหลักการในเรื่อง "เส้นแสดงผลผลิตเท่ากันโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง" หัวข้อ ๒.๑ ข้อย่อย ๗)

โดยที่ α , $\beta > 0$: พารามิเตอร์ตามที่กำหนด

และ x_1, $x_2 > 0$: จำนวนการใช้ปัจจัย

อนุพันธ์รวมมุ่งต่อ x_1 (Total derivative with respect to x_1)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\phi^{\circ}}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-1-\alpha/\beta}$$

$$= -\left\{\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\phi^{\circ}}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-(1+\alpha/\beta)}\right\}$$

พิจารณาค่า $\frac{dx_2}{dx_1}$

จาก α , $\beta > o$

$A > o$

และ $\phi^{\circ} > o$

$x_1 > o$

ดังนั้น

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\left\{\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\phi^{\circ}}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-(1+\alpha/\beta)}\right\} < 0 \quad \text{จริง} \quad //$$

พิจารณาหลักการ ข)

อนุพันธ์รวมลำดับที่สองมุ่งต่อ x_1

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{\alpha(1+\alpha/\beta)}{\beta} \left(\frac{\phi}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-(1+\alpha/\beta)-1}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\beta_2} \left(\frac{\phi}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-(2+\alpha/\beta)}$$

ดังนั้นจะเห็นว่า

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\beta_2} \left(\frac{\phi}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-(2+\alpha/\beta)} > 0 \text{ จริง} \quad //$$

เช่นนี้แล้วจะสรุปผลการพิจารณาหลักการได้ว่า

ก) $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$

และ ข) $\frac{d^2x_2}{dx_1^2} > 0$

ดังนั้น เส้นแสดงผลผลิตเท่ากัน ของแบบสมการการผลิตของค๊อบ - ดักลาส จะโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลางจริง

ข.ต.พ. ///

จากคุณสมบัติของแบบสมการการผลิตของค๊อบ - ดักลาส ที่แสดงว่าเส้นผลผลิตเท่ากันจะโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง ทำให้ทราบว่า อัตราการทดแทนของการใช้ปัจจัยการผลิต หรือที่เรียกว่า อัตราการทดแทนทางเทคนิค (Rate of Technical Substitution : RTS) และสัดส่วนการใช้ปัจจัย (input ratio = $\frac{x_2}{x_1}$) จะต้องลดลงเรื่อย ๆ เมื่อใช้ปัจจัย x_1 เข้าแทนที่ปัจจัย x_2 มากขึ้นเรื่อย ๆ

ซึ่งการพิจารณาความสัมพัทธ์ข้างต้นนี้ สามารถแสดงให้อยู่ในรูปอัตราสัมพัทธภาพของการทดแทนกัน (Elasticity of Substitution) ได้ดังต่อไปนี้

นิยาม :

ความยืดหยุ่นของการทดแทนกัน (Elasticity of Substitution) คือ ค่าแสดงความสัมพัทธ์ของอัตราการใช้ปัจจัยการผลิต อันเกิดจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราการทดแทนการใช้ปัจจัยการผลิต หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงสัดส่วนการใช้ปัจจัยการผลิต อันเกิดจากการเปลี่ยนแปลงของอัตราการทดแทนทางเทคนิคนั่นเอง

โดยคณิตศาสตร์ :

$$\sigma = \frac{\text{อัตราการเปลี่ยนแปลงสัดส่วนของการใช้ปัจจัย}}{\text{อัตราการเปลี่ยนแปลงของการทดแทนทางเทคนิค}}$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}}{\dfrac{\Delta\,(RTS_{12})}{(RTS_{12})}}$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}}{\dfrac{\Delta\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)}{\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)}} \quad : \quad RTS_{12} = \frac{\phi_1}{\phi_2}$$

$$= \frac{\Delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\Delta\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)} \quad \frac{\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

$$= \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)} \quad \frac{\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

ดังนั้น ความยืดหยุ่นของการทดแทนกันของแบบสมการการผลิตของค็อบ-ดักลาส อาจแสดงให้เห็นได้ดังต่อไปนี้

จาก $$\sigma = \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)} \quad \frac{\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)}{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$$

ในที่นี้แบบสมการการผลิต

$$\phi = A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}$$

โดยที่:

$$\phi_1 = \alpha A\, x_1^{a-1}\, x_2^{\beta}$$

$$\phi_2 = \beta A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta-1}$$

ดังนั้น $$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

อนุพันธ์มุ่งต่อ $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ ได้

$$\frac{d\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)}{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

กฎปฏิภาคของอนุพันธ์ (inverse function rule of **dirivative**)

$$\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)} = \frac{\beta}{a}$$

แทนค่าใน σ

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)}{\left(\frac{x_2}{x_1} \right)}$$

$$= \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

$$= 1$$

นั่นคือ ความยืดหยุ่นของการทดแทนกัน ของแบบสมการการผลิตของค๊อบ-ดักลาส จะมีค่าเท่ากับหนึ่ง เสมอ ไม่ว่าแบบสมการนี้นั้น จะมีผลได้ต่อขนาดในรูปใด

อนึ่ง ความยืดหยุ่นของการทดแทนกันนี้ อาจจะแสดงในอีกรูปแบบหนึ่ง ซึ่งอยู่ในรูปของอัตราส่วนของราคาปัจจัยการผลิตได้ว่า

$$\sigma = \frac{d \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \left(\frac{Px_1}{Px_2} \right)}{d \left(\frac{Px_1}{Px_2} \right) \left(\frac{x_2}{x_1} \right)}$$

ทั้งนี้ เพราะ ณ ดุลยภาพ

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{Px_1}{Px_2} = RTS_{12}$$

๒.๒ ต้นทุนการผลิต (Cost of Production)

ต้นทุนการผลิตในที่นี้ จะหมายถึง ต้นทุนการผลิตที่อยู่ในรูปตัวเงินเท่านั้น และการพิจารณาเกี่ยวกับต้นทุนนี้จะพิจารณาทั้งต้นทุนการผลิตในระยะสั้น และต้นทุนการผลิตในระยะยาว ทั้งนี้เพราะต้นทุนทั้งสองรูปแบบมีความสัมพันธ์โดยตรงต่อการวิเคราะห์เศรษฐศาสตร์ในเชิงคณิตศาสตร์ ในสาระที่จะกล่าวถึงต่อไป

๑) แบบสมการต้นทุนระยะสั้น (Short-run Cost Function)

ต้นทุนระยะสั้น หมายถึง ต้นทุนการผลิตซึ่งประกอบด้วยต้นทุนแปรผันและต้นทุนคงที่ ทั้งนี้เพราะในระยะสั้นนั้น ปัจจัยการผลิตบางชนิดไม่อาจที่จะเปลี่ยนแปลงได้

โดยคณิตศาสตร์ :

$$C = C(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, F)$$

โดยที่ :

C หมายถึง ต้นทุนการผลิตรวม (Total cost)

X_i หมายถึง จำนวนปัจจัยการผลิตชนิดที่ i ซึ่งเป็นปัจจัยแปรผัน

F หมายถึง ต้นทุนคงที่ (Fixed cost)

ซึ่งแสดงว่า ต้นทุนระยะสั้นขึ้นอยู่กับ ปัจจัยแปรผัน n-ชนิด และปัจจัยคงที่ ถ้าหากว่าการผลิตนี้เกิดขึ้นในตลาดปัจจัยที่มีการแข่งขันโดยสมบูรณ์ สมการต้นทุนระยะสั้นก็อาจเขียนได้เป็น

$$C = P_{x_1} X_1 + P_{x_2} X_2 + P_{x_3} X_3 + \ldots + P_{x_n} X_n + F$$

โดยที่

P_{x_i} หมายถึง ราคาปัจจัยการผลิตชนิดที่ i

จากรูปแบบสมการการผลิตทั่วไป ผลผลิตจะขึ้นอยู่กับจำนวนการใช้ปัจจัยการผลิต

$$\phi = \phi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

ดังนั้น อาจกล่าวได้ว่า ต้นทุนแปรผันจะขึ้นอยู่กับจำนวนการผลิต ทั้งนี้เพราะว่าจำนวนการผลิตนั้นขึ้นอยู่กับปัจจัยแปรผัน

ฉะนั้นอาจจะเขียนแบบสมการต้นทุนระยะสั้นได้ใหม่ว่า

$$C = C(\phi) + F$$

จากต้นทุนการผลิตรวม จะสามารถหาต้นทุนชนิดอื่น ๆ ที่ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์วิเคราะห์ต่าง ๆ ได้ดังต่อไปนี้

ก) ต้นทุน เฉลี่ย (Average Cost)

ต้นทุนเฉลี่ย หมายถึง ต้นทุนการผลิต ที่ได้จากการเฉลี่ยด้วยจำนวนผลผลิต ณ ระดับการผลิตระดับใดระดับหนึ่ง หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า ต้นทุนเฉลี่ย ก็คือต้นทุนของผลิตผลต่อหน่วยนั่นเอง

ต้นทุนเฉลี่ย อาจแบ่งได้เป็น ๓ ประเภทย่อย ๆ คือ

(๑) ต้นทุนรวมเฉลี่ย (Average Total Cost : ATC)

(๒) ต้นทุนแปรผัน เฉลี่ย(Average Variable Cost : AVC)

(๓) ต้นทุนคงที่เฉลี่ย (Average Fixed Cost : AFC)

โดยคณิตศาสตร์

(๑) ต้นทุนรวมเฉลี่ย :

$$ATC = \frac{C}{\phi}$$

$$= \frac{X(\phi) + F}{\phi}$$