ตัวอย่าง : ผลิตให้ได้ผลผลิตมากที่สุด โดยใช้เงินทุนจำกัดจำนวนหนึ่งที่กำหนด สมมุติว่า ผู้ผลิตมีแบบสมการการผลิตเป็น

$$\phi = 8L^{\frac{1}{2}} + 20K^{\frac{1}{2}}$$

โดยที่

ϕ คือ จำนวนการผลิต

L คือ จำนวนปัจจัยแรงงาน

K คือ จำนวนปัจจัยทุน

ถ้าผู้ผลิตมีเงินทุนทั้งสิ้น ๘๑ หน่วยเงินตรา เพื่อใช้จ่ายในการซื้อปัจจัยการผลิตทั้งสองชนิด โดยที่ปัจจัยแรงงานและปัจจัยทุนมีราคาหน่วยละ ๑ หน่วยเงินตรา และ ๕ หน่วยเงินตรา ตามลำดับ

อยากทราบว่า : ผู้ผลิตจะผลิตสินค้าได้อย่างมากที่สุดเท่าไร

วิธีทำ :

๑) แบบสมการกระบวนการหาค่าสูงสุด ภายใต้เงื่อนไข

maximize

$$\phi = 8L^{\frac{1}{2}} + 20K^{\frac{1}{2}}$$

Subject to

$$81 = L + 5K$$

๒) พิจารณาหาค่าวิกฤตของตัวแปร

โดยวิธีการของ Lagrange Multiplier method จะได้ Lagrangean Function ซึ่งมี β เป็น Lagrange Multiplier ดังนี้

$$J = 8L^{\frac{1}{2}} + 20K^{\frac{1}{2}} + \beta(81 - L - 5K)$$

First - Order Condition (Necessary Condition)

อนุพันธ์บางส่วนมุ่งต่อ L,K และ β แล้วเทียบค่าเท่ากับศูนย์

$$J_L = 4L^{-\frac{1}{2}} - \beta = 0 \quad \text{----} \quad (I)$$

$$J_K = 10K^{-\frac{1}{2}} - 5\beta = 0 \quad \text{———} \quad (2)$$

$$J_\beta = 81 - L - 5K = 0 \quad \text{———} \quad (3)$$

จาก(1),(2) และ(3) จะได้ค่าวิกฤต (critical number) เป็น

$$L = 36$$

$$K = 9$$

$$\beta = 2/3$$

๓) ทดสอบ เพื่อยืนยันค่าวิกฤต :

Second - Order Condition (Sufficient Condition)

โดยการพิจารณา Bordered Hessian Determinant

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} J_{LL} & J_{LK} & J_{L\beta} \\ J_{KL} & J_{KK} & J_{K\beta} \\ J_{\beta L} & J_{\beta K} & J_{\beta\beta} \end{vmatrix}$$

ในที่นี้ มีตัวแปรที่แท้จริงทั้งหมด $n = 2$ ตัวแปร คือ L และ K โดยมีสมการเงื่อนไขทั้งหมด $m = 1$ สมการ

ดังนั้นจะมี Bordered Hessian Determinan ทั้งหมดที่ต้องทดสอบ $n-m = 2-1 = 1$ ชุด ซึ่ง Second - Order Condition จะยืนยันว่าค่าวิกฤตของตัวแปรจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมายก็ต่อเมื่อ Bordered Hessian Determinant ชุดที่ i ใด ๆ $|\bar{H}_{m+i}|$, มีเครื่องหมาย $(-1)^{m+i}$ ในที่นี้ $|\bar{H}|$ ชุดแรกและชุดเดียวที่มีคือ

$$|\bar{H}_{m+i}| = |\bar{H}_{1+1}| = \begin{vmatrix} -2L^{-3/2} & 0 & -1 \\ 0 & -5K^{-3/2} & -5 \\ I-l & -5 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{cases} m = 1 \\ i = 1 \end{cases}$$

$$|\bar{H}_2| = 5K^{-3/2} + 50L^{-3/2}$$

เมื่อค่าวิกฤต $L = 36$ และ $K = 9$

จะได้ $|\bar{H}_2| = 5(9)^{-3/2} + 50(36)^{-3/2}$

$$= 5\left(\frac{1}{27}\right) + 50\left(\frac{1}{216}\right)$$

$$= 0.417$$

แสดงว่า $|\bar{H}_2| > 0$ จริง //

นั้นคือ ค่าวิกฤตของตัวแปรเมื่อ

$$L = 36$$

$$K = 9$$

$$\beta = 2/3$$

จะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมายจริง ๆ และค่าวิกฤตของเป้าหมาย (critical value) คือ

$$\phi = 8L^{1/2} + 20K^{1/2}$$

แทนค่า L และ K : $= 8(36)^{1/2} + 20(9)^{1/2}$

$$= 108$$

ดังนั้น ผู้ผลิตจะต้องจัดสรรเงินทุน ๘๑ หน่วยเงินตราที่มีอยู่ เพื่อซื้อปัจจัยแรงงาน (L) ๓๖ หน่วยแรงงาน และ ซื้อปัจจัยทุน (K) ๙ หน่วยทุน แล้วเขาจะได้ผลิตผลสินค้ามากที่สุด ๑๐๘ หน่วยสินค้า

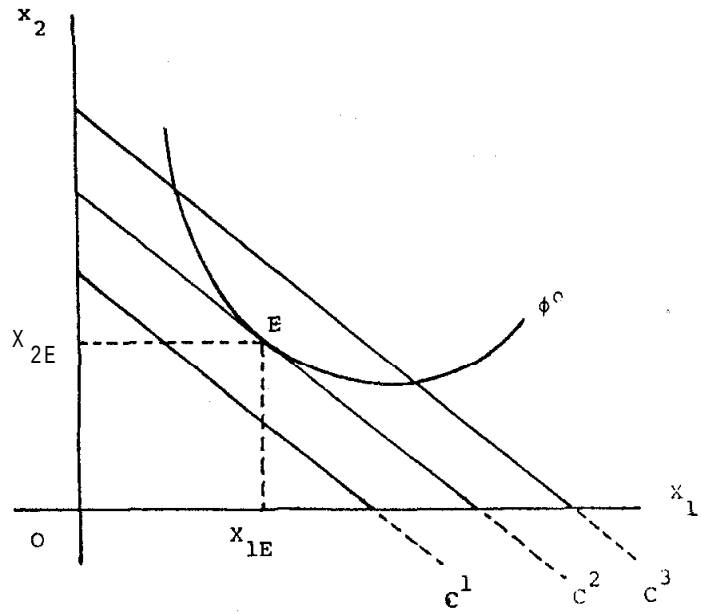
ตอบ ///

๓.๒ ผลิตโดยใช้ต้นทุนการผลิตน้อยที่สุด เพื่อให้ได้ผลเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดบางประการ (Constrained Cost Minimization)

การผลิตในที่นี้ เป็นกรณีที่ผู้ผลิตต้องการจะทำการผลิต โดยมีเป้าหมายที่จะประหยัดต้นทุนการผลิตให้มากที่สุด (เสียต้นทุนการผลิตน้อยที่สุด) แต่ก็ให้ได้ผลลัพธ์เป็นไปตามที่กำหนดไว้แล้ว ซึ่งผลลัพธ์หรือเงื่อนไขที่กำหนดไว้แล้วนี้นั้น อาจจะได้แก่ จำนวนผลิตผลที่ต้องการก็ได้

ในที่นี้ จะสมมุติว่า ผู้ผลิตต้องการจะทำการผลิตให้เสียต้นทุนน้อยที่สุด (C) โดยให้ทำการผลิตสินค้าให้ได้จำนวนที่กำหนดไว้ (ϕ°) แล้ว และการผลิตนี้ เป็นการผลิตในตลาดสินค้าและตลาดปัจจัยการผลิตที่มีการแข่งขันโดยสมบูรณ์

โดยเรขาคณิต :



พิจารณารูป :

ดุลยภาพของผู้ผลิต เพื่อให้เสียต้นทุนต่ำสุด จะอยู่ ณ ตำแหน่ง E ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เส้นแสดงผลิตผลเท่ากัน สัมผัสกับเส้นแสดงต้นทุนเท่ากัน เส้นที่ต่ำที่สุดมาทางซ้าย ณ ตำแหน่ง E นี้จะแสดงว่าผลิตจะเสียต้นทุนการผลิตเป็นจำนวน C^2 หน่วยเงินตรา (ไม่ใช่ C ยกกำลัง) ซึ่งเป็นจำนวนต้นทุนที่ต่ำที่สุดโดยให้ได้ผลิตผล ϕ° หน่วยสินค้าที่กำหนดไว้ ซึ่งต้องใช้จ่ายเพื่อซื้อปัจจัยการผลิตชนิดที่หนึ่ง X_{1E} หน่วยปัจจัย และจ่ายเพื่อซื้อปัจจัยชนิดที่สอง X_{2E} หน่วยปัจจัย

โดยคณิตศาสตร์ :

ผลิตโดยใช้ต้นทุนการผลิตน้อยที่สุด เพื่อให้ได้ผลิตผลตามที่กำหนด

แบบสมการการต้นทุน

$$C = P_{x_1} X_1 + P_{x_2} X_2 + F$$

ผลิตผลที่กำหนด

$$\phi^{\circ} = \phi\ (x_1,\ x_2)$$

จากหลักการทางคณิตศาสตร์ เพื่อหาค่าต่ำสุด ภายใต้เงื่อนไขบางประการจะได้กระบวนการ เพื่อหาค่าต่ำสุดเป็น

•) แบบสมการ

Minimize (เป้าหมายเพื่อหาค่าต่ำสุด)

$$C = P_{x_1} X_1 + P_{x_2} x_2 + F$$

Subject to (ภายใต้เงื่อนไข)

$$\phi^{\circ} = \phi\ (x_1,\ x_2)$$

๒) พิจารณาหาค่าวิกฤตของตัวแปร :

โดยวิธีการของ Lagrange Multiplier Method จะได้ Lagrangean Function (Augment Function : G) โดยการรวมแบบสมการเป้าหมายเข้ากับแบบสมการเงื่อนไข โดยมี Lagrange Multiplier (λ) เป็นตัวเชื่อมดังนี้

$$G = P_{x_1}X_1 + P_{x_2}X_2 + F + \lambda \{ \phi - \phi(x_1, x_2) \}$$

First-Order Condition (Necessary Condition)

กฎเกณฑ์ที่จำเป็นเพื่อหาค่าวิกฤต โดยนำ Lagrangean Function มาหาค่าอนุพันธ์บางส่วนมุ่งต่อตัวแปรทุกตัวที่มีอยู่ในแบบสมการ (ได้แก่ x_1, x_2 และ λ) แล้วนำค่าอนุพันธ์บางส่วนเหล่านี้เทียบให้มีค่าเป็นศูนย์ (๐) ทั้งนี้เพื่อแสดงว่า ค่าความชันของแบบสมการมุ่งต่อตัวแปรต่าง ๆ เหล่านั้นมีค่าเป็นศูนย์อันจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของเป้าหมายที่กำหนด แล้วถอดหาค่าวิกฤตนั้น

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = G_1 = \frac{\partial(P_{x_1}X_1 + P_{x_2}X_2 + F)}{\partial x_1} + \frac{\partial \lambda\{\phi - \phi(x_1, x_2)\}}{\partial x_1}$$

$$= P_{x_1} - \lambda \phi_1 \qquad : \text{สัญญลักษณ์}$$

เมื่อ $G_1 = 0$: ค่าความชันเป็นศูนย์

$$\therefore \quad P_{x_1} - \lambda\phi_1 = 0 \qquad \text{———————} \quad (1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = G_2 = \frac{\partial(P_{x_1}X_1 + P_{x_2}X_2 + F)}{\partial x_2} + \frac{\partial \lambda\{\phi^{\circ} - \phi(x_1, x_2)\}}{\partial x_2}$$

$$= P_{x_2} - \lambda \phi_2 \qquad \text{สัญญลักษณ์}$$

เมื่อ $G_2 = 0$: ค่าความชัน เป็นศูนย์

ดังนั้น $P_{x_2} - \lambda\phi_2 = 0$ ---------- ----- (๒)

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = G_\lambda = \frac{a(P_{x_1}X_1 + P_{x_2}X_2 + F)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}\{\phi^\circ - \phi(x_1, x_2)\} 3$$

$$= \phi^\circ - \phi(x_1, x_2)$$

เมื่อ $G_\lambda = 0$: ค่าความชัน I ป็นศูนย์

ดังนั้น $\phi^\circ - \phi(x_1, x_2) = 0$ ---------- (๓)

จากสมการ (๑), (๒) และ (๓) สามารถถอดหาค่าวิกฤตสร้างเป็นกฎเกณฑ์เพื่อหาค่าต่ำสุดได้ดังนี้

จาก (๑) $P_{x_1} - \lambda\phi_1 = 0$

$\lambda\phi_1$ บวกเข้าทั้งสองข้าง $P_{x_1} = \lambda\phi_1$ ----------(๑)'

ϕ_1 หารตลอด $\frac{P_{x_1}}{\phi_1} = \lambda$ ----------(๒)''

จาก (๒) $P_{x_2} - \lambda\phi_2 = 0$

$\lambda\phi_2$ บวกเข้าทั้งสองข้าง $P_{x_2} = \lambda\phi_2$ -------- ------ (๒)'

ϕ_2 หารตลอด $\frac{P_{x_2}}{\phi_2} = \lambda$ ----- -------- (๒)''

ดังนั้นจะได้

จาก (๑)" และ (๒)" $\frac{P_{x_1}}{\phi_1} = \frac{P_{x_2}}{\phi_2} = \lambda$ ---------- (๔)

และจาก $\frac{(๑)}{(๒)}$, $\frac{P_{x_1}}{P_{x_2}} = \frac{\phi_1}{\phi_2}$ ----------(B)

ซึ่งอาจจะสรุปเป็นค่าวิกฤต (critical number) ได้ว่า

ก. $P_{x_i} = \lambda \phi_i$ (i = 1, 2)

หรือ $\frac{P_{x_i}}{\phi_i} = \lambda$

ข. $\frac{P_{x_1}}{P_{x_2}} = \frac{\phi_1}{\phi_2} = RTS_{12}$

อย่างไรก็ตามกฎเกณฑ์ดังกล่าวข้างต้น ยังไม่สามารถยืนยันได้ว่ากฎเกณฑ์นั้นจะนำมาซึ่งค่าต่ำสุดของเป้าหมาย (เสียต้นทุนน้อยที่สุด) ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องทดสอบเพื่อยืนยัน(Sufficient Condition : Second - Order Condition) ให้เพียงพอที่จะยอมรับได้ว่า ค่าวิกฤตจากกฎเกณฑ์ที่จำเป็น จะนำมาซึ่งค่าต่ำสุดของเป้าหมายตามที่กำหนด

๓) ทดสอบเพื่อยืนยัน

(Second - Order Condition (Sufficient Condition) :

กฎเกณฑ์เพื่อยืนยันอย่างเพียงพอ โดยการพิจารณา Bordered Hessian Determinant จะได้ Bordered Hessian Determinant ในลักษณะ

$$|\bar{H}| \quad 5 \quad \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{1\lambda} \\ G_{21} & G_{22} & G_{2\lambda} \\ G_{\lambda 1} & G_{\lambda 2} & G_{t\lambda} \end{vmatrix}$$

ในกรณีนี้

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} -\lambda\phi_{11} & -\lambda\phi_{12} & -\phi_1 \\ -\lambda\phi_{21} & -\lambda\phi_{22} & -\phi_2 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

จากเรื่องการหาค่าสูงสุด - ต่ำสุด (Maxima - Minima) จะพบว่าการทดสอบนี้จะยืนยันว่า ค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าต่ำสุดของเป้าหมาย (ต้นทุนน้อยที่สุด) ก็ต่อเมื่อ Bordered Hessian Determinant ชุดที่ i ใด ๆ ($\bar{H}_{m+i}$) จะต้องมีเครื่องหมายเป็น $(-1)^m$ เท่านั้น (i หมายถึงลำดับที่ของ Discriminant ซึ่งมีจำนวน n - m ชุด โดยที่ n หมายถึงจำนวนตัวแปรที่แท้จริง และ m หมายถึง จำนวนสมการเงื่อนไข)

ในที่นี้ มีตัวแปรที่แท้จริง ๒ ตัว คือ x_1 และ x_2 (สำหรับ λ เป็น Lagrange Multiplier ที่สมมุติขึ้นเพื่อการคำนวณมิใช่ตัวแปรที่แท้จริง) และมีเงื่อนไขเพียงสมการเดียว ดังนั้นจะมี Bordered Hessian Determinant) ที่ต้องพิจารณาเพียงชุดเดียว ($n - m = 2 - 1$ ชุด และ $i = 1$)

ดังนั้น Bordered Hessian Determinant ข้างต้นจะยืนยันว่า ค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าต่ำสุดของ เป้าหมาย do มีเครื่องหมาย $(-1)^m = (-1)^1 = -1$ คือเป็นลบ (-) เท่านั้น

ซึ่ง Bordered **Hessian Determinant** ชุดแรกและชุด เดียว ที่มีอยู่ในที่นี้ก็คือ

ชุดแรก :

$$|\bar{H}_{m+1}| = |\bar{H}_{1+1}| \qquad \left(\begin{matrix} m = 1 \\ i = 1 \end{matrix} \right.$$

$$= |\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} -\lambda\phi_{11} & -\lambda\phi_{12} & -\phi_1 \\ -\lambda\phi_{21} & -\lambda\phi_{22} & -\phi_2 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

ถอดค่า determinant $= \lambda\phi_1^2\phi_{22} + \lambda\phi^2\phi_{11} - \lambda\phi_1\phi_2\phi_{12} - \lambda\phi_1\phi_2\phi_{21}$

$$= \lambda\,(\phi_1^2\phi_{22} - 2\phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_2^2\phi_{11})$$

: $\phi_{12} = \phi_{21}$ โดย Young's Theorem

ดังนั้นค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของ เป้าหมายก็ต่อ เมื่อ

$$|\bar{H}_2| = \lambda(\phi_1^2\phi_{22} - 2\phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_2^2\phi_{11}) < 0$$ เป็นลบเท่านั้น

แต่ $\lambda > 0$ เสมอ

ดังนั้น

$$\lambda\,(\phi_1^2\phi_{22} - 2\phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_2^2\phi_{11}) < 0$$ ได้ก็ต่อเมื่อ

$$(\phi_1^2\phi_{22} - 2\phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_2^2\phi_{11}) < 0$$ นั่นเอง และมีความหมาย

ว่า การผลิตจะต้องเกิดขึ้นในช่วงที่เส้นแสดงผลิตผลเท่ากันกำลังโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง[1/]

กล่าวโดยรวม ๆ ก็คือ ค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าต่ำสุดของเป้าหมาย (ต้นทุนน้อยที่สุด) ก็ต่อเมื่อ การผลิตนั้นเกิดขึ้นในช่วงที่ เส้นแสดงผลิตผลเท่ากันกำลังโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลางเท่านั้น

ดังนั้นโดยสรุปแล้ว การที่จะผลิตให้ได้ผลิตผลตามที่กำหนดไว้แล้ว โดยให้ใช้งบประมาณหรือต้นทุนการผลิตน้อยที่สุด จะต้องเป็นการผลิตที่เกิดขึ้นในช่วงที่เส้นแสดงผลิตผลเท่ากันกำลังโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง และผู้ผลิตจะต้องวางแผนการจัดสรรปัจจัยการผลิต (เงินทุน) จนกระทั่ง :

ก. $$\frac{P_{x_1}}{\phi_1} = \lambda$$

อัตราส่วนของราคาปัจจัยการผลิตต่อผลิตผลส่วนเหลื่อมของแต่ละปัจจัยเท่ากับ ต้นทุนส่วนเหลื่อมของการผลิต (λ = MC) พอดี

และ ข. $$\frac{P_{x_1}}{P_{x_2}} = \frac{\phi_1}{\phi_2} = RTS_{12}$$

อัตราส่วนของราคาปัจจัยการผลิตชนิดต่าง ๆ และอัตราส่วนของผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิตเหล่านั้นเท่ากันพอดี หรือกล่าวอักนัยหนึ่งว่า อัตราส่วนของราคาปัจจัยการผลิตชนิดต่าง ๆ เท่ากับ อัตราการทดแทนทางเทคนิค (RTS) ของปัจจัยเหล่านั้นพอดี

หมายเหตุ :

ในที่นี้ λ = MC ซึ่งอาจแสดงให้เห็นจริงได้ดังนี้

แสดง :

จากแบบสมการต้นทุนการผลิต (Cost Function)

1/ ดูหัวข้อ ๒.๑ ข้อย่อย ๗) เรื่อง "เส้นแสดงผลิตผลเท่ากันโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง"

$$C = P_{x_1}X_1 + P_{x_2}X_2 + F$$

อนุพันธ์รวม (total differential)

$$dc = P_{x_1}dx_1 + P_{x_2}dx_2$$

จากดุลภาพของการผลิต อันเกิดจากค่าวิกฤต

$$P_{x_i} = \lambda \phi_i$$

ดังนั้น $dc = (\lambda \phi_1)\, dx_1 + (\lambda\phi_2)\, dx_2$: แทนค่า

$$= \lambda (\phi_1 dx_1 + \phi_2 dx_2)$$

แต่จากแบบสมการการผลิต

$$\phi = \phi(x_1, x_2)$$

ดังนั้น $d\phi = \phi_1\, dx_1 + \phi_2\, dx_2$

แทนค่าใน dc

$$dc = \lambda (d\phi)$$

หรือ $\frac{dc}{d\phi} = \lambda$

แต่ $\frac{dc}{d\phi} = MC$: MC = Marginal Cost

ดังนั้น $\lambda = MC$ ///

ตัวอย่าง : ผลิตโดยใช้ต้นทุนการผลิตน้อยที่สุด เพื่อให้ได้ผลผลิตตามเงื่อนไข

สมมุติว่า ผู้ผลิตมีแบบสมการการผลิตเป็น

$$\phi = 8L^{\frac{1}{2}} + 20K^{\frac{1}{2}}$$

โดย;

ϕ คือจำนวนการผลิต

L คือจำนวนปัจจัยแรงงาน

K คือจำนวนปัจจัยทุน

ถ้า ปัจจัยแรงงาน และปัจจัยทุนมีราคาหน่วยละ ๑ หน่วยเงินตรา และ ๕ หน่วยเงินตราตามลำดับ

อยากทราบว่า ถ้าผู้ผลิตต้องการจะผลิตสินค้าทั้งหมด ๑๐๘ หน่วยสินค้าเขาจะเสียต้นทุนการผลิตอย่างน้อยที่สุดเท่าไร

วิธีทำ :

๑) แบบสมการกระบวนการหาค่าต่ำสุดภายใต้เงื่อนไข

Minimize

$$C = L + 5K$$

Subject to

$$108 = 8L^{\frac{1}{2}} + 20K^{\frac{1}{2}}$$

๒) พิจารณาค่าวิกฤตของตัวแปร

โดยวิธีการของ Lagrange Multiplier, Method จะได้ Lagrangean Function ซึ่งมี λ เป็น Lagrange Multiplier ดังนี้ :

$$G = L + 5K + \lambda\,(108 - 8L^{\frac{1}{2}} - 20K^{\frac{1}{2}})$$

First - Order Condition (Necessary Condition)

อนุพันธ์บางส่วนมุ่งต่อ L , K และ λ แล้วเทียบค่าเท่ากับศูนย์

$$G_L = 1 - 4\,\lambda L^{-\frac{1}{2}} = 0 \qquad \text{----------} \quad (1)$$

$$G_K = 5 - 10\lambda\,K^{-\frac{1}{2}} = 0 \qquad \text{----------} \quad (2)$$

$$G_\lambda = 108 - 8L^{\frac{1}{2}} - 20K^{\frac{1}{2}} = 0 \qquad \text{----------} \quad (3)$$

จากสมการ (๑), (๒) และ (๓) จะได้ค่าวิกฤต (critical number) เป็น

$$L = 36$$

$$K = 9$$

$$\lambda = \frac{3}{2}$$

๓) ทดสอบเพื่อยืนยันค่าวิกฤต :

Second - Order Condition (Sufficient Condition)

โดยการพิจารณา Bordered Hessian Determinant

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{1k} & G_{1\lambda} \\ G_{k1} & G_{kk} & G_{k\lambda} \\ G_{\lambda 1} & G_{\lambda k} & G_{\lambda\lambda} \end{vmatrix}$$

ในที่นี้ มีตัวแปรที่แท้จริงทั้งหมด n= 2 ตัวแปร คือ L และ K โดยมีสมการเงื่อนไขทั้งหมด m = 1 สมการ

ดังนั้นจะมี Bordered Hessian Determinant ทั้งหมดที่ต้องทดสอบ n - m = 2 - 1 = 1 ชุด ซึ่ง second - order condition จะยืนยันว่าค่าวิกฤตของตัวแปรจะนำมาซึ่งค่าต่ำสุดของเป้าหมายก็ต่อเมื่อ Bordered Hessian Determinant ชุดที่ i ใด ๆ ($\bar{H}_{m+i}$) มีเครื่องหมาย $(-1)^m$

ในที่นี้ $|\bar{H}|$ ชุดแรกและชุดเดียวที่มีคือ

$$|\bar{H}_{m+i}| = |\bar{H}_{1+1}| = \begin{vmatrix} 2\lambda L^{-3/2} & 0 & -4L^{-1/2} \\ 0 & 5\lambda K^{-3/2} & -10K^{-1/2} \\ -4L^{-1/2} & -10K^{-1/2} & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} m = 1 \\ i = 1 \end{cases}$$

$$|\bar{H}_2| = -80\lambda L^{-1}K^{-3/2} - 200\lambda L^{-3/2} K^{-1}$$

เมื่อค่าวิกฤต L = 36, K-9 และ $\lambda = \frac{3}{2}$

$$\therefore \quad |\bar{H}_2| = -80(\tfrac{3}{2})(36)^{-1}(9)^{-3/2} - 200(\tfrac{3}{2})(36)^{-3/2}(9)^{-1}$$

$$= -0.1235 - 0.1543$$

$$= -0.278 < 0$$

แสดงว่า $|\bar{H}_2| < 0$ จริง

นั่นคือ ค่าวิกฤตของตัวแปร เมื่อ

$$L = 36$$

$$K = 9$$

$$\lambda = \frac{3}{2}$$

จะนำมาซึ่งค่าต่ำสุดของเป้าหมาย และค่าวิกฤตของเป้าหมาย (critical value) คือ

$$C = L + 5K$$

แทนค่า L และ K : $= 36 + 5(9)$

$$= 81$$

ดังนั้น ผู้ผลิตจะทำการผลิตได้สินค้า ๑๐๘ หน่วยสินค้าตามต้องการ โดยใช้ปัจจัยแรงงาน (L) ๓๖ หน่วยแรงงาน และปัจจัยทุน (K) ๙ หน่วยทุน แล้วจะเสียต้นทุนอย่างน้อยที่สุด ๘๑ หน่วยเงินตรา

ตอบ ///

๓.๓ ผลิตเพื่อให้ได้กำไรมากที่สุด (Profit Maximization)

การผลิตในกรณีนี้นั้น ผู้ผลิตมีจุดมุ่งหมายเพื่อให้ได้กำไรจากการผลิตสินค้ามากที่สุด หรือถ้าจำต้องขาดทุนก็ต้องการที่จะให้เกิดการขาดทุนน้อยที่สุด ดังนั้นปัญหาของผู้ผลิตก็จะอยู่ที่ว่าจะมีหลักเกณฑ์การตัดสินใจการผลิตอย่างไร ทั้งนี้เพราะการผลิตเพื่อให้ได้กำไรสูงสุดนี้นั้น จะไม่มีเงื่อนไขใด ๆ เป็นขอบเขตบังคับ (without constraint) หากแต่ในที่นี้จะศึกษาในกรณีที่ผู้ผลิตทำการผลิตในตลาดที่มีการแข่งขันโดยสมบูรณ์ในตลาดสินค้าและตลาดปัจจัย ทั้งนี้เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาต่อไป

โดยคณิตศาสตร์ :

สมมุติว่า ในการผลิตนี้ ต้องใช้ปัจจัยการผลิตเพียงสองชนิดเท่านั้น ดังนี้ กำไรก็จะคือส่วนต่างของรายได้จากการขายสินค้ากับต้นทุนที่ใช้จ่ายเพื่อซื้อปัจจัยการผลิตทั้งหมดนั่นเอง

แบบสมการกำไร (Profit Function)

$$\Pi = R - C$$

โดยที่ :

Π หมายถึง กำไร

R หมายถึง รายได้ ซึ่งเกิดจากราคาขาย (P) คูณกับจำนวนที่ผลิตขาย (ϕ)

C หมายถึง ต้นทุนการผลิต ประกอบด้วยต้นทุนแปรผันและต้นทุนคงที่

ดังนั้น

$$\Pi = P.\phi(x_1,x_2) - (Px_1X_1 + Px_2X_2 + F)$$

$$\Pi = P.\phi(x_1,x_2) - Px_1X_1 - Px_2X_2 - F$$

และสามารถสร้างแบบสมการกระบวนการหาค่าสูงสุดได้ดังต่อไปนี้

๑) แบบสมการ

Maximize:

$$\Pi = P.\phi(x_1,x_2) - Px_1X_1 - Px_2X_2 - F$$

๒) พิจารณาหาค่าวิกฤตของตัวแปร

ในที่นี้การหาค่าวิกฤตที่จะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมายโดยปราศจากเงื่อนไขใดๆ

First - Order Condition (Necessary Condition) :

กฎเกณฑ์ที่จำเป็นเพื่อหาค่าวิกฤตนี้ หาได้จาก การหาค่าอนุพันธ์บางส่วนมุ่งต่อตัวแปรทุกตัวที่มีในแบบสมการ (x_1 และ x_2) แล้วนำค่าอนุพันธ์เหล่านี้เทียบให้มีค่าเป็นศูนย์ (๐) ทั้งนี้เพื่อแสดงว่า ค่าความชันของแบบสมการมุ่งต่อตัวแปรต่าง ๆ เหล่านั้นมีค่าเป็นศูนย์ อันจะนำมาซึ่งค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดของเป้าหมายที่กำหนด แล้วถอดหาค่าวิกฤตนั้น

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = \Pi_1 = \frac{\partial \{P\phi(x_1, x_2)\}}{\partial x_1} - \frac{\partial (Px_1X_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial (Px_2X_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1}$$

$$= P\phi_1 - Px_1$$: สัญญลักษณ์

เมื่อ $\Pi_1 = 0$ ค่าความชันเป็นศูนย์

ดังนั้น $P\phi_i - Px_1 = 0$ ---------- (1)

$$\frac{\partial n}{\partial x_2} = \Pi_2 = \frac{\partial \{P\phi(x_1, x_2)\}}{\partial x_2} - \frac{\partial (Px_1X_1)}{\partial x_2} - \frac{\partial (Px_2X_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

$$= P\phi_2 - Px_2$$: สัญญลักษณ์

เมื่อ $\Pi_2 = 0$: ค่าความชัน เป็นศูนย์

ดังนั้น $P\phi_2 - Px_2 = 0$

จากสมการ (๑) และ (๒) สามารถถอดหาค่าวิกฤตสร้างเป็นกฎเกณฑ์เพื่อหาค่าสูงสุดได้ดังนี้

จาก (๑) $P\phi_1 - Px_1 = 0$

Px_1 บวกเข้าทั้งสองข้าง $P\phi_1 = Px_1$ ---------- (1)'

จาก (๒) $P\phi_2 - Px_2 = 0$

Px_2 บวกเข้าทั้งสองข้าง $P\phi_2 = Px_2$ ---------- (2)

แล้ว $\frac{(1)}{(2)}$ $\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{Px_1}{Px_2}$

ซึ่งอาจจะสรุปเป็นค่าวิกฤต (critical numbe , ได้ว่า

ก. $P\phi_i = Px_i$ $(i = 1, 2)$

ข. $\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{PX_1}{Px_2}$

อย่างไรก็ตามกฎเกณฑ์ดังกล่าวข้างต้น ยังไม่สามารถยืนยันได้ว่า กฎเกณฑ์นั้นจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมาย (กำไรสูงสุด) ดังนั้นจึงจำเป็นที่จะต้องทดสอบเพื่อยืนยันให้เพียงพอที่จะยอมรับได้ว่า ค่าวิกฤตตามเกณฑ์ที่จำเป็นจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมาย

๑) ทดสอบเพื่อยืนยันค่าวิกฤต

second - Order **Condition** (Sufficient Condition) :

กฎเกณฑ์เพื่อยืนยันอย่างเพียงพอ โดยการพิจารณา Hessian Determinant ในลักษณะ :

$$|H| = \begin{vmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{vmatrix} \qquad \Pi_{ij} = \frac{\partial \Pi_j}{\partial x_i}$$