ในที่นี้

$$|H| = \begin{vmatrix} P\phi_{11} & P\phi_{12} \\ P\phi_{21} & P\phi_{22} \end{vmatrix}$$

จากเรื่องการหาค่าสูงสุด - ต่ำสุด (Maxima - Minima) โดยไม่มีเงื่อนไข (without constraint) การทดสอบจะยืนยันว่าค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าสูงสุด ก็ต่อเมื่อ Hessian Determinant ชุดที่ i ใด ๆ ($|\bar{H}_{m+i}|$) จะมีเครื่องหมายเป็น $(-1)^{m+1}$ เท่านั้น (i หมายถึง ลำดับที่ของ Discriminant ซึ่งมีจำนวน n - m ชุด โดยที่ n หมายถึง จำนวนตัวแปรและ m หมายถึงจำนวนสมการเงื่อนไข)

ในที่นี้มีตัวแปร ๒ ตัว คือ x_1 และ x_2 แต่ไม่มีเงื่อนไขใด ๆ เลย (m = 0) ดังนั้นจะมี Hessian Determinant ที่จะต้องพิจารณาสองชุดด้วยกัน (n - m = 2 - 0 = 2 และ i = 1, 2) ซึ่ง Hessian Determinant แต่ละชุดจะยืนยันว่าค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าสูงสุด เมื่อชุดที่ i มีเครื่องหมาย $(-1)^{m+i} = (-1)^{0+i} = (-1)^{i}$

ซึ่ง Hessian Determinant แต่ละชุดเสนอได้ดังนี้

ชุดแรก : $|H_{m+1}| = |H_{0+1}|$ $\quad \begin{cases} m = 0 \\ i = 1 \end{cases}$

$$= |H_1| \qquad |H_{11}|$$

$$= P\,\phi_{11}$$

จะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมายเมื่อ $|H_1|$ มีเครื่องหมาย $(-1)^1 = -1 < 0$

นั่นคือ

$$|H_1| = P\,\phi_{11} < 0$$

แต่ P เป็นราคาสินค้าซึ่งต้องเป็นบวก

ดังนั้น $\phi_{11} < 0$ (เป็นลบ)

และชุดที่สอง : $|H_{m+2}| = |H_{0+2}|$ $\begin{cases} m = 0 \\ i = 2 \end{cases}$

$$= |H_2|$$

$$= \begin{vmatrix} P\phi_{11} & P\phi_{12} \\ P\phi_{21} & P\phi_{22} \end{vmatrix}$$

ถอดค่า determinant: $= P^2 \{\phi_{11}\phi_{22} - (\phi_{12})^2\}$

ถ้าค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมาย $|H_2|$ จะต้องมีเครื่องหมาย

$(-1)^2 = 1 > 0$

นั่นคือ

$$|H_2| = P^2 \{\phi_{11}\phi_{12} - (\phi_{12})^2\} > 0$$

แต่ P เป็นราคาสินค้าซึ่งต้องเป็นบวก

ดังนั้น $\{\phi_{11}\phi_{22} - (\phi_{12})^2\} > 0$ (เป็นบวก)

จาก $(\phi_{12})^2$ จะต้องเป็นบวกเสมอ

เช่นนี้แล้ว $\phi_{11}\phi_{22} > 0$

แต่ $\phi_{11} \cdot \phi_{22}$ จะเป็นบวกก็ต่อเมื่อ ϕ_{11} และ ϕ_{22} มีเครื่องหมายเหมือนกัน ซึ่งเป็นที่ทราบแล้วว่า $\phi_{11} < 0$: จาก $|H_1|$

ดังนั้น $\phi_{22} < 0$ ด้วย

โดยสรุปจาก $|H_1|$ และ $|H_2|$ การทดสอบนี้จะยืนยันว่าค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมายเมื่อ

ก. $\phi_{11} < 0$

และ ข. $\phi_{22} < 0$

โดยที่ : $\$11 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial (MP_1)}{\partial x_1}$ = อัตราการเปลี่ยนแปลงของผลิตผลส่วนเหลื่อมของ x_1

$\phi_{22} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = \frac{a(MP_2)}{\partial x_2}$ = อัตราการเปลี่ยนแปลงของผลิตผลส่วนเหลื่อมของ x_2

ซึ่งหมายความว่า ค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดของเป้าหมาย (กำไรสูงสุด) ก็ต่อเมื่อ การผลิตนั้นเกิดขึ้นในช่วงที่ ผลิตผลส่วนเหลื่อมของแต่ละปัจจัยการผลิตกำลังลดลง ($\phi_{11} < 0$ และ $\phi_{22} < 0$)

ดังนั้น โดยสรุปแล้ว การผลิตจะได้กำไรสูงสุด เมื่อการผลิตนั้นเกิดขึ้นในช่วงที่ผลิตผลส่วนเหลื่อมของแต่ละปัจจัยการผลิตกำลังลดลง และผู้ผลิตจะต้องจัดสรรการผลิตจนกระทั่ง

ก. $Px_i = P\phi_i = VMP_i \quad (i = 1, 2)$

มูลค่าของผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิต Value Marginal Product

VMP แต่ละชนิด เท่ากับ ราคาของปัจจัยการผลิตชนิดนั้น ๆ พอดี

และ ข. $\frac{Px_1}{Px_2} = \frac{\phi_1}{\phi_2} = RTS_{12}$

อัตราส่วนของราคาปัจจัยการผลิตชนิดต่าง ๆ เท่ากับ อัตราการทดแทนทางเทคนิคของปัจจัยเหล่านั้นพอดี

ตัวอย่าง : ผลิตเพื่อกำไรสูงสุด

สมมุติว่า ผู้ผลิตมีแบบสมการการผลิตเป็น

$$\phi = 8L^{\frac{1}{2}} + 20K^{\frac{1}{2}}$$

โดยที่:

ϕ คือจำนวนผลผลิต

L คือจำนวนปัจจัยแรงงาน

K คือจำนวนปัจจัยทุน

ถ้า ปัจจัยแรงงาน และปัจจัยทุนราคาหน่วยละ ๑ หน่วยเงินตรา และ ๕ หน่วยเงินตราตามลำดับ

อยากทราบว่า ถ้าราคาสินค้าซื้อขายกันในตลาดหน่วยละ ๑.๕๐ หน่วยเงินตรา แล้ว ผู้ผลิตควรจะต้องผลิตสินค้าออกสู่ตลาดทั้งหมดเท่าไร เขาจึงจะได้กำไรสูงสุด

วิธีทำ:

๑) แบบสมการ

Maximize $\Pi = R-C$

$$= (P\phi) - (P_1L + P_kK)$$

เมื่อ : $P = 1.5$

$P_i = 1$

$Pk = 5$

แล้ว $\pi = 1.5(8L^{\frac{1}{2}} + 20K^{\frac{1}{2}}) - (L + 5K)$

$= 12L^{\frac{1}{2}} + 30K^{\frac{1}{2}} - L - 5K$

๒) พิจารณาค่าวิกฤตของตัวแปร

First - Order Condition (Necessary Condition)

อนุพันธ์บางส่วนมุ่งต่อ L และ K แล้วเทียบค่าเท่ากับศูนย์

$\pi_1 = 6L^{-\frac{1}{2}} - 1 = 0$ ---------- (1)

$\pi_k = 15K^{-\frac{1}{2}} - 5 = 3$ ---------- (2)

จาก (9) และ (๒) จะได้ค่าวิกฤต (critical number) เป็น

$L = 36$

$K = 9$

๓) ทดสอบเพื่อยืนยันค่าวิกฤต

Second - Order Condition (Sufficient Condition):

โดยการพิจารณา Hessian Determinant

$$|H| = \begin{vmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3L^{-3/2} & 0 \\ 0 & -\frac{15}{2}K^{-3/2} \end{vmatrix}$$

ในที่นี้ Hessian Determinant ที่ต้องทดสอบมี ๒ ชุด (n-m = 2-0 = 2)

คือ

$$|H_1| = |\Pi_{11}|$$

$$= -3L^{-3/2}$$

$$= -3(36)^{-3/2}$$

$$= -0.0139 < 0$$

และ

$$|H_2| = \begin{vmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3L^{-3/2} & 0 \\ 0 & -\frac{15}{2}K^{-3/2} \end{vmatrix}$$

$$= (-3L^{-3/2}) \cdot (-\frac{15}{2}K^{-3/2})$$

$$= \frac{45}{2}L^{-3/2} \cdot K^{-3/2}$$

$$= \frac{45}{2}(36)^{-3/2} \quad (9)^{-3/2}$$

$$= 0.0039 > 0$$

นั่นคือ $|H_1| < 0$ และ $|H_2|$ 0 ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขของ Second - order Condition ที่ว่า ค่าวิกฤตจะนำมาซึ่งค่าสูงสุดเมื่อ $|H_{m+i}|$ จะต้องมีเครื่องหมาย $(-1)^{m+i}$

ดังนั้นผู้ผลิตจะได้กำไรสูงสุด เมื่อใช้ปัจจัยแรงงาน ๓๖ หน่วยแรงงาน และใช้ปัจจัยทุน ๙ หน่วยทุน และจะได้กำไรทั้งสิ้น

$$\Pi = 1.5(8L^{1/2} + 20K^{1/2}) - (L + 5K)$$

$$= 1.5\{8(36)^{1/2} + 20(9)^{1/2}\} - \{1+5(9)\}$$

$$= 81$$ หน่วยเงินตรา

โดยผลิตสินค้าออกสู่ตลาด

$$\phi = 8L^{\frac{1}{2}} + 20K^{\frac{1}{2}}$$

$$= 8(36)^{\frac{1}{2}} + 20(9)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 108$$ หน่วยสินค้า

ตอบ ///

ข้อสังเกต :

จะเห็นว่ากฎเกณฑ์อันเป็นเงื่อนไขแห่งดุลยภาพของผู้ผลิตโดยนัยของเป้าหมาย ไม่ว่าเป้าหมาย จะเพื่อผลิตให้ผลิตผลมากที่สุดภายใต้งบประมาณเงินทุนที่มีอยู่จำกัดจำนวนหนึ่ง (๓.๑) หรือผลิตเพื่อให้ได้ผลิตผลตามที่กำหนดโดยให้เสียต้นทุนน้อยที่สุด (๓.๒) หรือจะผลิตเพื่อให้ได้กำไรสูงที่สุดโดยไม่มีเงื่อนไขใด ๆ (๓.๓) จะมีกฎเกณฑ์ของเงื่อนไขการผลิตทำนองเดียวกัน

๔. สรุป

การศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีของการผลิตนี้ ได้ศึกษาหลักเกณฑ์การตัดสินใจในการผลิต ซึ่งทำให้ทราบถึงเกณฑ์การผลิตต่าง ๆ ตามเป้าหมายของการผลิตนั้น ๆ ในการศึกษานี้ ได้ศึกษาเกี่ยวเนื่องไปถึง ทฤษฎีการผลิตและทฤษฎีต้นทุนพร้อมกันไปด้วย ในการนี้ ทำให้ทราบว่า แบบสมการการผลิต หมายถึง แบบสมการทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างผลผลิตกับปัจจัยการผลิต และช่วงแห่งการผลิตที่สมเหตุสมผลนั้น ควรจะต้องเป็นช่วงการผลิตที่เส้นแสดงผลิตผลเท่ากันโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลาง ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นจริงได้ทางคณิตศาสตร์ว่า เส้นแสดงผลิตผลเท่ากันจะโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลางก็ต่อเมื่อ อนุพันธ์ครั้งที่หนึ่งมีค่าน้อยกว่าศูนย์ซึ่งแสดงว่ามีการทดแทนผกผันกัน และอนุพันธ์ครั้งที่สองจะต้องมีค่ามากกว่าศูนย์

แบบสมการการผลิตแบบหนึ่งที่น่าสนใจได้แก่ เอกมัยภาพแบบสมการการผลิต (homogeneous production function) โดยเฉพาะ เอกมัยแบบสมการการผลิตของ ค็อบ - ดักลาส เพราะแบบสมการการผลิตชนิดนี้มีคุณสมบัติพิเศษหลายประการได้แก่ การพิจารณาผลได้ต่อขนาดการเขียนให้อยู่ในรูป Euler's Theorem ได้ อันทำให้การพิจารณา ความยืดหยุ่นของการผลิตทำได้ง่าย ๆ เพราะ ค่าผลรวมของความยืดหยุ่นของการผลิตจะเท่ากับลำดับของความเป็นเอกมัยภาพพอดี และที่สำคัญที่สุดคือ แบบสมการเช่นนี้จะเป็นเส้นโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลางด้วย นอกจากนี้คุณสมบัติพิเศษอีกประการหนึ่งก็คือ แบบสมการนี้จะมีความยืดหยุ่นของการทดแทนกันเท่ากับหนึ่งเสมอ ไม่ว่าจะมีเอกมัยภาพลำดับที่เท่าใดก็ตาม

ในการศึกษาเกี่ยวกับต้นทุนการผลิตนั้นได้พิจารณาถึงต้นทุนการผลิตทั้งระยะสั้นและต้นทุนการผลิตระยะยาวโดยต้นทุนระยะยาวก็คือ ต้นทุนการผลิตที่ประกอบไปด้วยต้นทุนแปรผันทั้งสิ้น ทั้งนี้เพราะในระยะยาวต้นทุนทุกชนิดอาจเปลี่ยนแปลงไปได้ตามขนาดที่เหมาะสมของการผลิต ด้วยเหตุผลนี้ ต้นทุนระยะยาวอาจจะพิจารณาได้จากต้นทุนระยะสั้นเมื่อขนาดของต้นทุนคงที่เปลี่ยนแปลงไปตามความเหมาะสมของขนาดการผลิต

จากการได้ศึกษา เรื่องการผลิตและต้นทุนการผลิต ทำให้สามารถวิเคราะห์พิจารณาสร้างกฎเกณฑ์ เกี่ยวกับ การผลิตโดยนัยของเป้าหมาย (Optimization Behavior) ได้โดยทาง

คณิตศาสตร์ ซึ่งหลักเกณฑ์ที่วิเคราะห์ได้นี้เป็นกฎเกณฑ์ของดุลยภาพการผลิต เพื่อให้ได้ผลิตผลมากที่สุด ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดบางประการและดุลยภาพการผลิต เพื่อผลิตให้ได้ผลิตผลตามจำนวนที่กำหนด แต่ให้สิ้นแปลืองต้นทุนน้อยที่สุด รวมทั้งดุลยภาพของการผลิตเพื่อสร้างกำไรสูงสุดโดยไม่มีเงื่อนไขใด ๆ ซึ่งจากการวิเคราะห์โดยคณิตศาสตร์ ได้พบว่า การผลิตโดยนัยของเป้าหมาย เพื่อให้ได้ผลิตผลสูงสุดและเพื่อต้นทุนต่ำสุด มีกฎเกณฑ์เงื่อนไขการผลิตสอดคล้องกันที่เห็นได้ชัดเจน คือ ผู้ผลิตจะต้องจัดสรรการผลิตจนกระทั่ง อัตราส่วนของราคาปัจจัยการผลิตชนิดต่าง ๆ เท่ากับ อัตราส่วนของผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยเหล่านั้น หรือ เท่ากับ อัตราการทดแทนทางเทคนิคของปัจจัยเหล่านั้น (RTS) พอดี

$\left(\frac{Px_i}{Px_j} = \frac{\phi_i}{\phi_j} = RTS_{ij} \right)$ และ ต้องจัดสรรปัจจัยแต่ละชนิดจนกระทั่ง อัตราส่วนของราคาปัจจัยการผลิตต่อ ผลิตผลส่วนเหลื่อมของแต่ละปัจจัยเท่ากับต้นทุนส่วนเหลื่อมพอดี ทั้งการผลิตนี้นั้นจะต้องเกิดขึ้นในช่วงที่เส้นแสดงผลิตผล เท่ากับกำลังโค้งเข้าหาจุดศูนย์กลางด้วย สำหรับเกณฑ์เงื่อนไขการผลิตเพื่อกำไรสูงสุดก็มีหลักการเช่นเดียวกับเกณฑ์ข้างต้น คือ จะต้องจัดสรรการผลิตจนกระทั่งอัตราส่วนของราคาปัจจัยการผลิตชนิดต่าง ๆ เท่ากับ อัตราการทดแทนทางเทคนิคของปัจจัยเหล่านั้น แต่การใช้ปัจจัยการผลิตแต่ละชนิดจะต้องจัดสรรจนกระทั่ง มูลค่าของผลิตผลส่วนเหลื่อมของปัจจัยการผลิตเหล่านั้นเท่ากับ ราคาของปัจจัยการผลิตนั้น ๆ พอดี และการผลิตนี้นั้นจะต้องเกิดขึ้นในช่วงที่ผลิตผลส่วนเหลื่อมของแต่ละปัจจัยกำลังลดลง

อย่างไรก็ตามโดยสรุปแล้ว กฎเกณฑ์การผลิตโดยนัยของเป้าหมายทั้งเพื่อผลิตผลสูงสุดหรือเพื่อต้นทุนต่ำสุดหรือเพื่อกำไรสูงสุด ก็มีเงื่อนไขอย่างเดียวกันนั่นเอง หากแต่จะแตกต่างกันบ้างเล็กน้อยในรูปแบบการพิจารณาอธิบายเท่านั้น ซึ่งถ้าจะพิจารณาโดยเรขาคณิตแล้วจะเห็นได้ชัดเจนว่าดุลยภาพเงื่อนไขดังกล่าวก็คือตำแหน่งที่เส้นแสดงผลิตผลเท่ากัน สัมผัสกับ เส้นแสดงต้นทุนเท่ากันเหมือนกันนั่นเอง

ผนวก

สรุป การหาค่าสูงสุด - ต่ำสุด

(Maxima - Minima)

ถ้า Lagrangean Function ซึ่งมี n ตัวแปรและ m เงื่อนไข คือ

$$G = G(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$$

1st Order Condition เพื่อหาค่าวิกฤต (critical number)

$$dG = 0 \quad : \text{อนุพันธ์รวม}$$

หรือ $G_i = 0$: อนุพันธ์บางส่วน $(i = x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$

2nd Order Condition เพื่อยืนยันค่าวิกฤต :

ต้องทดสอบ Hessian Determinant ทั้งหมด n - m ชุดด้วยกัน และ

ก) กรณีการหาค่าสูงสุด (Maximization)

$$d^2G < 0 \qquad \text{negative definite}$$

หรือโดยการพิจารณา Bordered Hessian Determinant $(|\bar{H}|)$

$|\bar{H}_{m+i}|$ ต้องมีเครื่องหมาย $(-1)^{m+i}$: $|\bar{H}|$ ลำดับที่ i

ข) กรณีการหาค่าต่ำสุด (Minimization)

$$d^2G > 0 \quad : \text{positive definite}$$

หรือโดยการพิจารณา Bordered Hessian Determinant ($|\bar{H}_i|$)

$|\bar{H}_{m+i}|$ ต้องมีเครื่องหมาย $(-1)^m$: $|\bar{H}|$ ลำดับที่ i

โดยที่ :

n หมายถึง จำนวนตัวแปรที่แท้จริง (x_i)

m หมายถึง จำนวนสมการเงื่อนไข (λ_i)

i หมายถึง ลำดับที่ของ Hessian Determinant ซึ่งมีลำดับตั้งแต่ ๑ ถึง (n − m)

หรือ $i = 1, 2, \ldots, n - m$

$|\bar{H}_{m+i}|$ หมายถึง Bordered Hessian Determinant

ที่มี (m+i) − row และ (m+i) − col. ที่เป็นอนุพันธ์บางส่วนครั้งที่สอง (second partial derivative) มุ่งต่อตัวแปรที่แท้จริง (x_i) ล้วน ๆ และมีอีก m − row และ m − col. ที่มุ่งต่อ Lagrange Multiplier (λ_i) และตัวแปรที่แท้จริง (x_i) คละกันไป ดังนั้น $|\bar{H}_{m+i}|$ จะมีขนาด {(m+i) + m }− row และ {(m+i) +m } − col

ตัวอย่าง :

"1 $n = 5$

$m = 2$

ดังนั้นต้องทดสอบ 2nd Order Condition

ทั้งสิ้น $n - m = 5 - 2 = 3$ ชุด $(i = 1, 2, 3)$

โดย $|\bar{H}|$ ลำดับที่ ๑ : $i = 1$ คือ

$$
|\bar{H}_{2+1}| = \begin{array}{c} \\ 2+1 \\ \\ 2 \end{array}
\overbrace{\left|\begin{array}{ccc|cc}
G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{\cdot} & G_{1\lambda_2} \\
G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{2\lambda_1} & G_{2\lambda_2} \\
G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{3\lambda_1} & G_{3\lambda_2} \\
\hline
G_{\lambda_1 1} & G_{\lambda_1 2} & G_{\lambda_1 3} & G_{\lambda_1\lambda_1} & G_{\lambda_1\lambda_2} \\
G_{\lambda_2 1} & G_{\lambda_2 2} & G_{\lambda_2 3} & G_{\lambda_2\lambda_1} & G_{\lambda_2\lambda_2}
\end{array}\right|}^{2+1}
$$

ซึ่งมีขนาด $\{(2+1)+2\}$- rowและ$\{(2+1)+2\}$. col.

แบบฝึกหัด

๑. กำหนดให้

$\phi = 10K^{1/4} L^{3/4}$ คือแบบสมการการผลิต (Production Function)

โดยที่ L คือ ปัจจัยแรงงาน

K คือ ปัจจัยทุน

ก. จงแสดงว่า แบบสมการการผลิตนี้ แสดงผลได้ต่อขนาดคงที่ (Constant returns to scale)

ข. จงหาผลิตผลเฉลี่ยและผลผลิตหน่วยเพิ่มของปัจจัยการผลิตทั้งสอง (average and marginal) products for labor and capital)

ค. จงหาผลที่เกิดขึ้นกับผลผลิตหน่วยเพิ่มของปัจจัยทุน (MP_k) เมื่อใช้ปัจจัยแรงงานมากขึ้น

ง. จงหาผลที่เกิดขึ้นถ้าผลผลิตหน่วยเพิ่มของปัจจัยแรงงาน (MP_l) เมื่อใช้ปัจจัยทุนเพิ่มขึ้น

จ. จงหาอัตราทดแทนทางเทคนิค (rate of technical Substitution) ของปัจจัยทุนต่อปัจจัยแรงงาน และของปัจจัยแรงงานต่อปัจจัยทุน

ฉ. จงหาค่าความยืดหยุ่นของการผลิต (elasticity of production) อันเกิดจากปัจจัยทุนและอันเกิดจากปัจจัยแรงงาน

ช. จงแสดงว่าความยืดหยุ่นของการทดแทนกัน (elasticity of substitution) มีค่าเท่ากับ ๑ พอดี

ญ. จงแสดงว่าแบบสมการการผลิตข้างต้นนี้เขียนให้อยู่ในรูป Euler's Theorim ได้

๒. กำหนดให้

= (L, K)

ก. จงแสดงให้เห็นจริง ขณะที่ผลผลิตเฉลี่ยของปัจจัยแรงงาน (average product of labor) กำลังลดลงแล้วละก็ผลผลิตหน่วยเพิ่ม (marginal product) จะมีค่าน้อยกว่าผลผลิตเฉลี่ยดังกล่าว

ข. จงแสดงให้เห็นจริงว่าขณะที่ผลผลิตเฉลี่ยของปัจจัยทุนมีค่าสูงสุดแล้วละก็ ผลผลิตเฉลี่ยจะมีค่าเท่ากับผลผลิตหน่วยเพิ่มพอดี

๓. ผู้ผลิตคนหนึ่งต้องการจะขายสินค้าอย่างหนึ่งของเขาซึ่งสินค้านี้มีแบบสมการการผลิต (production function) เป็น

$$4 = 2X_1^{\frac{1}{2}} + X_2^{\frac{1}{2}}$$

ถ้าหากว่า

X_1 คือ จำนวนปัจจัยการผลิตชนิดที่หนึ่งและมีราคาหน่วยละ ๔ บาท

X_2 คือ จำนวนปัจจัยการผลิตชนิดที่สอง และมีราคาหน่วยละ ๕ บาท

และต้นทุนคงที่ (fixed cost) ในการผลิตสินค้านี้เป็น ๑๐๐ บาท

อยากทราบว่า

ก. ถ้าสินค้าที่ซื้อขายกันในตลาดราคาหน่วยละ ๒๐ บาท แล้วผู้ผลิตควรจะผลิตสินค้าน้ำออกขายในตลาดเท่าไร จึงจะได้กำไรสูงสุด

ข. ถ้าผู้ผลิตต้องการจะผลิตสินค้าเพียง ๑๒ หน่วย เขาควรจะใช้ปัจจัยการผลิตทั้งสอง (X_1 และ X_2) อย่างละเท่าไร จึงจะเสียต้นทุนน้อยที่สุด

ค. ถ้าผู้ผลิตมีเงินทุนอยู่เพียง ๒๒๐ บาท เขาจะผลิตสินค้าได้ทั้งหมดอย่างมากที่สุดเท่าไร

๔. จงแสดงให้เห็นจริงว่า ถ้าผู้ผลิตต้องการผลิตสินค้าอย่างใดอย่างหนึ่งให้ได้จำนวนมากที่สุดภายใต้เงินทุนที่มีอยู่ หรือจะผลิตสินค้านี้เพื่อให้เสียงบประมาณต่ำสุด แต่ได้ผลผลิตจำนวนหนึ่งตามที่ตั้งเป้าหมายไว้ หรือจะผลิตให้ได้กำไรสูงสุด ผู้ผลิตก็จะมีหลักเกณฑ์การจัดสรรการผลิตเหมือนกันทุกกรณี (ทั้ง ๓ กรณี) และจงแสดงด้วยว่าในการผลิต แต่ละกรณีจะต้องทำการผลิตในภาวะการณ์เช่นไร

บรรณานุกรม

Allen, R.G.D., *Mathematical Analysis for Economist*, London : Macmillan & Co., 1938.

Allen, R.G.D., *Mathematical Economics*, London : Macmillan & Co., 1964.

Archibald, G.C. and R.G. Lipsey.
An introduction to A Mathematical Treatment of Economics, London : Cox and Wyman Ltd., 1973.

Baumal, William J.
Economic Theory and Operation Analysis. 3 rd ed., New Jersey : Prentic - Hall, Inc., 1972.

Chiang, A.C. *Fundamental Methods of Mathematical Economics* . New York : McGraw - Bill Book Co., Inc., 1967.

Ferguson, C.E. *Microeconomics*, 2 nd ad., Homewood, Illinoise : Richard D. Irwin, Inc., 1973.

Henderson, J.M. and R.E.Quant. *Microeconomics* : A Mathematical Approach. New York : McGraw - 11111 Book Co., Inc., 1971.

Kooros, A. *Elements of Mathematical Economics*. Poston : Coughton Miffian Co., 1965.

Yamane, T., *Mathematics for Economist* : An Element Survey, Englewood Cloffa, New Jersey : Prentice - Mill, Inc., 1962.